



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Académica Profesional de Computación Científica

**Procesamiento de imágenes basado en el análisis de
ondículas**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación
Científica

AUTOR

Nilton Alan GARCÍA HILARES

ASESOR

Víctor Rafael CABANILLAS ZANNINI

Lima, Perú

2011



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

García, N. (2011). *Procesamiento de imágenes basado en el análisis de ondículas*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Computación Científica. Escuela Académica Profesional de Computación Científica, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

“Si las personas no creen que las matemáticas son simples, es simplemente porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida.”

John von Neumann

“En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.”

John von Neumann

Resumen

PROCESAMIENTO DE IMÁGENES BASADO EN EL ANÁLISIS DE ONDÍCULAS

Nilton Alan García Hilares

MARZO - 2011

Orientador : Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
Título Obtenido : Licenciado en Computación Científica

En esta tesis se desarrolla el fundamento matemático del Análisis de Ondículas (Wavelets) para luego aplicarlo al procesamiento de imágenes. El análisis de ondículas es estructurado siguiendo su evolución temporal partiendo de resultados generales sobre ondículas, extendiendo estos resultados con los frames para luego desarrollar la matemática del análisis multiresolución en cual se desarrollan los algoritmos piramidales o algoritmos de descomposición y reconstrucción por ondículas.

Desarrollado el Análisis de Ondículas se procede a aplicar los algoritmos piramidales en el contexto de las imágenes, mediante la Transformada Rápida de Ondícula (TRO) bidimensional, centrándose en tres aplicaciones: detección de bordes, compresión de imagen y reducción de ruido.

PALABRAS CLAVE: ondículas, frames, análisis multiresolución (AMR), algoritmos piramidales, descomposición y reconstrucción por ondículas, Transformada Rápida de Ondícula (TRO), detección de bordes, compresión de imagen, reducción de ruido.

Abstract

IMAGE PROCESSING BASED ON WAVELET ANALYSIS

Nilton Alan García Hilares

MARZO - 2011

Advisor : Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
Title Obtained : Degree in Scientific Computing

This thesis develops the mathematical foundation of Wavelet Analysis and then apply to the image processing. The Wavelet Analysis is structured according to its temporal evolution starting with general results on wavelets, extending its results with frames in order to develop the mathematics of Multiresolution Analysis (AMR) in which pyramidal algorithms are developed also named decomposition and reconstruction by wavelets algorithms.

Developed Wavelet Analysis we proceed to apply the pyramidal algorithm in the context of images, by the Two-Dimensional Fast Wavelet Transform (FWT), focusing on three applications: edge detection, image compression and noise reduction.

KEYWORDS: Wavelets, frames, Multiresolution Analysis (AMR), pyramidal algorithms, decomposition and reconstruction by wavelets algorithms, Fast Wavelet Transform (FWT), edge detection, image compression, noise reduction.

Tabla de Contenidos

Resumen	iv
Abstract	v
1 Introducción	1
2 Preliminares	4
2.1 Espacios Métricos	4
2.2 Espacios Normados	5
2.2.1 Operadores Lineales	6
2.3 Espacios con Producto Interno	7
2.3.1 Operador Adjunto	8
2.3.2 Operador Proyección	9
2.4 Medida e Integral de Lebesgue	9
2.5 Espacios $L^p(\mathbb{K})$	12
2.5.1 Teoremas importantes	12
2.5.2 Operadores Traslación y Dilatación	13
2.6 Análisis de Fourier	14
2.6.1 Series de Fourier	14
2.6.2 Transformada de Fourier	16
3 Ondículas	19
3.1 Ondícula	19
3.2 Transformada Continua de Ondícula	30
3.3 Transformada Discreta de Ondícula	37
3.4 Ejemplos	38
4 Frames	41
4.1 Frame	41
4.2 Operador Frame	41
4.3 Frame como base de Riesz	48
4.4 Frame de Ondículas	49
5 Análisis Multiresolución	52
5.1 Análisis Multiresolución (AMR)	52
5.2 Construcción de un AMR a Partir de una Función Escala	53

5.3	Construcción de Ondículas a Partir de un AMR	63
5.4	Ejemplos	78
6	Descomposición y Reconstrucción Basada en Ondículas	82
6.1	Filtros Low-Pass y High-Pass	82
6.2	Algoritmos Basados en Ondículas	84
6.2.1	Operadores Aproximación y Detalle	84
6.2.2	Algoritmo de Descomposición por Ondículas	88
6.2.3	Algoritmo de Reconstrucción por Ondículas	92
6.3	Transformada Rápida de Ondícula (TRO)	94
6.4	Ejemplos	96
7	Aplicación al Procesamiento de Imágenes	101
7.1	Representación de Imágenes	101
7.2	Descomposición y Reconstrucción de Imágenes	103
7.2.1	Transformada Rápida de Ondícula Bidimensional	103
7.2.2	Resultados sobre la TRO bidimensional	107
7.3	Detección de Bordes	109
7.4	Compresión de Imagen	113
7.5	Reducción de Ruido	115
7.6	Interface Gráfica	118
	Discusión	121
	Bibliografía	125
A	Historia del Análisis de Ondículas	126
B	Algoritmos Básicos	129
B.1	Ordenamiento	129
B.2	TRO3	130
B.3	TROI3	131
B.4	Detección de Bordes	132
B.5	Compresión de Imagen	133
B.6	Reducción de Ruido	134
C	Códigos en MATLAB® R2010a	135
C.1	Wavelet	135
C.2	Explicación TRO bidimensional	141
C.3	TRO3	143
C.4	TROI3	145
C.5	Detección de Bordes	147
C.6	Compresión de Imagen	148
C.7	Reducción de Ruido	150
D	Utilizando el prototipo <i>Wavelet</i>	152

Lista de Figuras

3.1	Ondícula de Haar	38
3.2	Ondícula definida en el Ejemplo 3.2	39
3.3	Ondícula definida en el Ejemplo 3.3	40
3.4	Ondícula Sombrero Mexicano	40
6.1	Esquema del Algoritmo de Descomposición por Ondículas	92
6.2	Esquema del Algoritmo de Reconstrucción por Ondículas	94
6.3	Grafico de f , función original del Ejemplo 6.3	97
6.4	Grafico de la función $P_5 f$	98
6.5	Grafico de la función $P_8 f$	98
6.6	Grafico de la función $P_{10} f$	99
7.1	Representación matricial de una imagen en escala de grises	102
7.2	Espacio de colores RGB	102
7.3	Representación de una imagen en el espacio de colores RGB	103
7.4	Imagen de prueba, en escala de grises, representada por $[f]$	104
7.5	Resultado del producto $[MF_{M \times M}] [f]$	104
7.6	Resultado de ordenar las filas del producto $[MF_{M \times M}] [f]$	105
7.7	Resultado de $[MF_{M \times M}] [f] [MF_{N \times N}^T]$	105
7.8	Resultado correspondiente a $TRO(f)$	106
7.9	Facultad de Ciencias Matemáticas (FCM)	107
7.10	Resultado de aplicar $TRO3$	108
7.11	Aproximación con menor resolución de la FCM	108
7.12	Descomposición de la aproximación de la FCM	109
7.13	Descomposición a 2 niveles	109
7.14	Escudo UNMSM	110
7.15	Resultado de aplicar $TRO3$ a $Y(f)$	111
7.16	(a) Resultado de aplicar nuevamente $TRO3$, (b) Depreciado de datos en la segunda descomposición, (c) Bordes de la imagen aproximada	111
7.17	Nueva imagen a procesar	112
7.18	(a) Bordes iniciales, (b) Bordes finales	112
7.19	Imagen f , Huaco Mochica	113
7.20	Resultado de $TRO3(f)$	114
7.21	(a) Antes del umbral, (b) Después del umbral	114
7.22	(a) Compresión a umbral de 10%, (b) Compresión a umbral de 20%	115

7.23	Manto Paracas, con ruido Gaussiano	116
7.24	(a) Descomposición de f con ruido, (b) Reducción de ruido en la descomposición de f	117
7.25	(a) Imagen inicial (b)Imagen después de la reducción del ruido	117
7.26	Desarrollo de la interface gráfica de usuario	118
7.27	Utilizando <i>uigetfile</i> para leer imágenes	118
7.28	Utilizando <i>Static Text</i> y <i>Edit Text</i>	119
7.29	Utilizando <i>Botton Group</i> y <i>Radio Button</i>	119
7.30	Utilizando <i>Push Button</i>	119
7.31	Utilizando <i>Check Box</i>	120
7.32	Prototipo <i>Wavelet</i>	120
D.1	Interface del Prototipo <i>Wavelet</i>	152
D.2	Ceramica Nazca	153
D.3	(a) 1 nivel de descomposición, (b) 2 niveles de descomposición	153
D.4	(a) 3 niveles de descomposición, (b) 4 niveles de descomposición	154
D.5	Tatuaje de Tumi	154
D.6	(a)Bordes con parámetros por defecto , (b) Bordes con parámetros modificados	155
D.7	(a)vitral, (b) bordes del vitral	155
D.8	Reunión de amigos	156
D.9	Compresión a umbral de 5%	156
D.10	Compresión a umbral de 10%	157
D.11	Guerrero Inca (21.7 Kb)	157
D.12	(a)Umbral de 5% (20.9 Kb) , (b) Umbral de 10% (20.2 Kb),(c) Umbral de 15% (19.9 Kb), (d) Umbral de 20% (20.3 Kb), (e) Umbral de 25% (21.3 Kb)	158
D.13	Loro peruano	159
D.14	Loro peruano con ruido Gaussiano	159
D.15	Loro peruano con ruido reducido	160
D.16	(a) Detalle de Kuelap, (b) Imagen con ruido uniforme	160
D.17	(a) Reducción a 1 nivel de descomposición, (b) Reducción a 2 niveles de descomposición	160

Capítulo 1

Introducción

La presente tesis es una investigación sobre los fundamentos matemáticos del Análisis de Ondículas y la aplicación de los mismos al procesamiento de imágenes.

El precedente histórico más antiguo del Análisis de Ondículas es el análisis de Fourier originado en 1807, posteriormente en 1909, Alfred Haar presenta su tesis doctoral *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, que es el primer trabajo propiamente dicho en el campo de las ondículas; en los años venideros siguieron algunos estudios relacionados este campo. En 1952 R. J. Duffin y A. C. Schaeffer introducen la noción de frames en las matemáticas, en ese entonces esta matemática no tenía relación alguna con las ondículas. En 1982, P. J. Burt y E. H. Adelson desarrollan el algoritmo piramidal para la compresión de imágenes y posteriormente la idea de la observación de señales a distintas escalas de resolución ya era familiar para los expertos en procesamiento de imágenes. En 1986 la matemática de los frames es reutilizada por I. Daubechies, A. Grossman con Y. Meyer en el artículo *Painless nonorthogonal expansions* el cual es el primero en utilizar los frames en conjunto con las ondículas. Así también en 1986 S. Mallat, que trabajaba en su tesis doctoral sobre visión informática, un antiguo alumno de Y. Meyer con ayuda del mismo sentaron las bases de un modelo llamado Análisis Multiresolución (AMR) además de vincular la teoría de ondículas a la literatura existente sobre el procesamiento de imágenes, llevando los algoritmos piramidales al contexto de las ondículas.

Este trabajo es estructurado siguiendo la evolución temporal del Análisis de Ondículas, en el Capítulo 1: Preliminares, se hace un recuento de las definiciones, propiedades, lemas y teoremas necesarios para poder entender la matemática desarrollada en los capítulos posteriores, información complementaria se puede encontrar en [1], [2], [3]. En el Capítulo 2: Ondículas, se enuncia la primera definición de ondícula, con la cual se trabaja a lo largo del mismo capítulo, la condición de admisibilidad de ondícula y la Transformada Continua de Ondícula (TCO) con la cual se demuestran resultados análogos al análisis de Fourier, tales como la relación de Parseval, la formula de Inversión e isometría para la TCO [4]. En el Capítulo 3: Frames, después alguno de los resultados más importantes en este campo [5], vamos a ver como los frames se relacionan con las bases de Riesz [6], [7]; siendo uno de los resultados más importantes el Teorema de Daubechies el cual relaciona cierto tipo de

frame con la condición de admisibilidad de ondícula [8], como consecuencia de este teorema se presenta al final del capítulo una nueva definición de ondícula la cual es utilizada para los resultados del capítulo posterior. En el Capítulo 4: Análisis Multiresolución (AMR), se estudia las condiciones del AMR [6], [9]; así como el teorema de construcción de un AMR a partir de una función escala y la construcción de una ondícula a partir de una AMR [9]. En el Capítulo 5: Descomposición y Reconstrucción basada en Ondículas, se estudian los algoritmos piramidales en el ámbito del AMR [10], además de la Transformada Rápida de Ondícula (TRO) con la cual se pueden computar dichos algoritmos [11], [12]. El Capítulo 6: Aplicación al Procesamiento de Imágenes, empieza tratando sobre la representación matricial de las imágenes en escala de grises y la representación de imágenes en el espacio de color RGB [13], ambas representaciones son matriciales por este hecho se extiende el concepto de TRO para poder trabajar con matrices, TRO bidimensional, para luego ilustrar los procesos de detección de bordes, compresión de imagen y reducción de ruido [10], [11], [12].

Adicionalmente se diseñaron algoritmos, Apéndice B, básicos para los procedimientos del Capítulo 6, en base a estos algoritmos, en MATLAB® R2010a, se desarrollo un prototipo para ilustrar procedimientos del Capítulo 5 y las aplicaciones del Capítulo 6, el código de este prototipo se muestra en el Apéndice C, y una breve explicación e ilustración de cómo utilizarlo se muestra en el Apéndice D.

Veamos con un poco más de detalle el fundamento del Capítulo 6. Para una imagen en escala de grises cada píxel contiene un único valor correspondiente a una escala de 256 tonos grises. Sea la imagen f de $M \times N$ píxeles en escala de grises es representada por una matriz $[f]$ de orden $M \times N$, donde cada píxel de f está asociado a un elemento de $[f]$, $f_{i,j}$ con $i = 1, \dots, M$ y $j = 1, \dots, N$, el cual tiene como valor la intensidad de dicho píxel en la escala de grises (0-256).

La forma computacional de aplicar los algoritmos piramidales es a través de la Transformada Rápida de Ondícula, y al tener representada la imagen como una matriz, esta aplicación resulta una multiplicación matricial, debido a esto las implementaciones computacionales fueron realizadas en MATLAB® R2010a, ya que dicho programa brinda una gran facilidad para la manipulación de matrices además de incorporar un lenguaje propio para desarrollar algoritmos.

Todas las aplicaciones desarrolladas en este trabajo, básicamente constan de tres etapas, descomposición, filtrado y reconstrucción de imagen. Estas aplicaciones solo varían en el segundo paso i.e. los resultados obtenidos dependen del filtrado que se realiza a la imagen.

En este trabajo, primero, se desarrolló e implementó la descomposición y reconstrucción por ondículas en d niveles, ya que las aplicaciones desarrolladas en este trabajo dependen directamente del uso de la descomposición y reconstrucción por ondículas (algoritmos piramidales) pues solo se diferencian en el filtrado de datos que se realiza a la imagen descompuesta antes de reconstruirla. Por esto el paso crucial para desarrollar el aplicativo

fue descomponer y reconstruir. Estos procedimientos se desarrollaron en primer lugar para imágenes en escala de grises, como ya se había comentado antes, porque estos cálculos son operaciones matriciales. Después de haber terminado satisfactoriamente el diseño e implementación de los procedimientos de descomposición y reconstrucción para imágenes en escala de grises se procedió a extender dichos procedimientos a imágenes en color.

El espacio de color RGB, está basado en la combinación aditiva de tres colores primarios rojo, verde y azul. Entonces una imagen f a color de $M \times N$ píxeles se representará por la hipermatriz $[f]$ de orden $M \times N \times 3$ donde cada nivel corresponde a cada componente de la imagen en escala de rojos, verdes y azules respectivamente. Una imagen en el espacio RGB también puede ser vista como la agrupación de tres matrices, donde cada una de las matrices corresponde a la imagen en escala de rojos, verdes y azules respectivamente. De esta manera se pueden aplicar los procedimientos desarrollados para imágenes en escala de grises a estas matrices componentes. Para extender la aplicación a imágenes en color bastó con acoplar los procedimientos matriciales de orden $M \times N$, ya desarrollados, a procedimientos hipermatriciales de orden $M \times N \times 3$. En esta etapa del trabajo ya se puede descomponer imágenes, en escala de grises o a color, y reconstruirlas.

Las aplicaciones se desarrollaron teniendo como criterio la dificultad que representaría programar dicha aplicación, por lo que se empezó con la detección de bordes, finalizado satisfactoriamente este procedimiento se continuó con la compresión de imagen para luego terminar con la reducción de ruido.

La detección de bordes es una aplicación contemporánea ya que su principal uso es la segmentación de imagen y el reconocimiento de patrones en las mismas. Estas aplicaciones y en esencial el reconocimiento de patrones se utiliza bastante en la detección de rostros, visión artificial, etc.

El procedimiento de compresión de imagen históricamente fue la primera aplicación que se le dio a la teoría de ondículas, los resultados que se obtienen con la compresión por ondículas son notables, en este trabajo todos los procedimientos son implementados con el AMR de Haar, el mismo que se utiliza como ejemplo en los diversos capítulos de este trabajo. Debido a que solo se busca ilustrar como se aplica el Análisis de Ondículas al procesamiento de imágenes, para aplicaciones de mayor utilizad se suele utilizar el AMR que guarde mayor compatibilidad con la señal a analizarse, por ejemplo para el procesamiento de imágenes se suelen utilizar las ondículas de Daubechies.

Seguramente la aplicación, mostrada en este trabajo, que tiene mayor importancia es la reducción de ruido ya que este proceso es usado con mucha frecuencia en aparatos de uso cotidiano como son cámaras digitales, filmadoras, celulares, radios, etc. Debido a que el ruido está presente en casi toda transmisión de señales por lo que desarrollan nuevas tecnologías y herramientas para lidiar con este hecho.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Espacios Métricos

Definición 2.1 Sea M un conjunto cualquiera, sobre M definimos la aplicación $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

- i. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in M$.
- ii. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$.
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$.

Esta aplicación se denomina *métrica* sobre M , y el par (M, d) se denomina *espacio métrico*.

Observación 2.1 Toda métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ induce una norma por medio de

$$d(x, y) = \|x - y\|_M \quad \text{i.e.} \quad \|x\|_M = d(x, 0).$$

Definición 2.2 Sea (M, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en M . Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* a $x \in M$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{Si } n > N \text{ entonces } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

O equivalentemente

$$x_n \text{ converge si y sólo si } \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Teorema 2.1 Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en M entonces

- i. su límite es único.
- ii. toda subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.
- iii. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Definición 2.3 Sea (M, d) un espacio métrico y $a \in M$, el conjunto

$$B_r(a) = \{x \in M; d(x, a) < r\}$$

se denomina *bola* de centro a y radio r en M .

Definición 2.4 Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subseteq M$, decimos que

- i. A es *acotado* si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leq k$ para todo $x, y \in A$.
- ii. A es *abierto* si para cada elemento $x \in A$ existe una bola $B_r(x)$ tal que $B_r(x) \subset A$.
- iii. A es *cerrado* si $M - A$ es abierto.

Definición 2.5 Sea (M, d) un espacio métrico, decimos que M es un espacio métrico *completo* si toda sucesión de Cauchy en M es convergente en M .

Definición 2.6 Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$, decimos que A es *compacto* si de toda sucesión en A es posible extraer una subsucesión que converge en A .

Teorema 2.2 Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$ entonces

- i. si A es completo, entonces A es cerrado.
- ii. si M es completo, entonces A es completo si y sólo si A es cerrado.
- iii. si A es compacto, entonces A es cerrado y acotado.

Definición 2.7 Sea (M, d) un espacio métrico compacto, el conjunto de funciones continuas $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ será denotado por $C(M, \mathbb{K})$. Definimos la métrica

$$d(f, g) = \text{Sup} \{|f(x) - g(x)| : x \in M\} \quad \text{para todo } f, g \in C(M, \mathbb{K}).$$

2.2 Espacios Normados

Definición 2.8 Un *espacio vectorial* sobre un campo \mathbb{K} es un conjunto, no vacío, X de elementos x, y, \dots llamados *vectores*, para los cuales se definen dos operaciones algebraicas. Estas operaciones son llamadas *adición vectorial* y *multiplicación por un escalar*, esto es por elementos de \mathbb{K} .

Definición 2.9 Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , la aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *norma* sobre X , si verifica las siguientes condiciones:

- i. $\|x\| \geq 0$.
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.
- iv. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 2.10 Si $\|\cdot\|$ define una norma sobre X , entonces decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*. Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo (completo en la métrica definida por la norma).

2.2.1 Operadores Lineales

Definición 2.11 Sean X, Y dos espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal, entonces decimos que T es un *operador lineal*.

Proposición 2.1 Sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes

- i. T es uniformemente continua.
- ii. T es continua.
- iii. T es continua en cero.
- iv. Existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|Tx\| \leq k$ para todo $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$.
- v. Existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|Tx\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in X$.

Definición 2.12 Sean X, Y dos espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal, decimos que T es *acotada* si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad \text{para todo } x \in X.$$

Teorema 2.3 (Operador Inverso) Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces

- i. existe el operador inverso T^{-1} de T , si y sólo si $Tx = 0$ implica que $x = 0$.
- ii. si existe T^{-1} , entonces T^{-1} es lineal.

Observación 2.2 Utilizamos la notación $\mathcal{B}(X, Y)$ para el conjunto de todos los operadores lineales $T : X \rightarrow Y$ que son acotados, y $\mathcal{B}(X)$ para el conjunto de los operadores lineales $T : X \rightarrow X$ que son acotados.

Definición 2.13 Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ decimos que T es *invertible* si y sólo si existe $S \in \mathcal{B}(Y, X)$ tal que $ST = I_Y$ y $TS = I_X$, en tal caso el operador S se denomina *operador inverso* de T y se denota $S = T^{-1}$.

Lema 2.1 Sean los operadores $F, G \in \mathcal{B}(X, Y)$, entonces se cumple

$$\|FG\| \leq \|F\|\|G\|.$$

Observación 2.3 Para el operador invertible $F \in \mathcal{B}(X, Y)$ se cumple

- i. $\|FF^{-1}\| = 1$.
- ii. $1 \leq \|F\|\|F^{-1}\|$.

Teorema 2.4 Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| \leq 1$ entonces el operador $I - T$ es invertible y su inversa es dada por

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

2.3 Espacios con Producto Interno

Definición 2.14 Sea x un espacio vectorial, se denomina *producto interno* sobre X a una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- i. $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ y $\langle x, x \rangle \geq 0$.
- ii. $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- iii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.
- iv. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Observación 2.4 Un producto interno en X define una norma en X dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Y también una métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Definición 2.15 Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno sobre el espacio vectorial X , entonces decimos que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio con producto interno*. Un *espacio de Hilbert* es un espacio con producto interno completo (completo en la métrica definida por el producto interno).

Proposición 2.2 Sea H un espacio de Hilbert, con $u \in H$ tal que

$$\text{Si } \langle u, v \rangle_H = 0 \text{ para todo } v \in H, \text{ entonces } u = 0.$$

Definición 2.16 Un elemento x de un espacio con producto interno X es llamado *ortogonal* a $y \in X$ si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Proposición 2.3 (Desigualdad de Schwarz) Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma definida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces se cumple

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Definición 2.17 Un espacio X es llamado la *suma directa* de dos subespacios Y y Z de X , lo cual escribimos

$$X = Y \oplus Z,$$

si cada $x \in X$ tiene una única representación

$$x = y + z \quad \text{donde } y \in Y, z \in Z,$$

entonces Z es llamado el *complemento algebraico* de Y en X y viceversa.

Teorema 2.5 (Suma Directa) Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H . Entonces

$$H = Y \oplus Z \text{ donde } Z = Y^\perp,$$

y Z es llamado el *complemento ortogonal* de Y en H .

Definición 2.18 Un conjunto indexado $\{x_\alpha\}$ con $\alpha \in I$, es llamado *ortogonal* si $x_\alpha \perp x_\beta$ para $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$. La familia es *ortonormal* si es ortogonal y cada x_α tiene norma 1. Entonces para todo $\alpha, \beta \in I$ tenemos

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta. \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Teorema 2.6 (Desigualdad de Bessel) Sea $\{e_k\}$ una sucesión ortonormal en el espacio con producto interno $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces para cada $x \in X$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Teorema 2.7 Sea H un espacio de Hilbert, $\{e_k\}$ una sucesión ortonormal y $\{\alpha_k\}$ una sucesión en \mathbb{K} , entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \text{ converge si y sólo si } \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \text{ es convergente,}$$

en tal caso se cumple la relación de Pitágoras

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

2.3.1 Operador Adjunto

Teorema 2.8 Cada funcional lineal y acotado f en un espacio de Hilbert H puede ser representado en términos del producto interno, de la siguiente manera

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

donde z depende de f y es únicamente determinado por f , y además tiene norma

$$\|z\| = \|f\|.$$

Definición 2.19 Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, entonces el *operador adjunto* de T , denotado como $T^* : Y \rightarrow X$, es tal que para todo $u \in X$ y $v \in Y$ cumple

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle.$$

Teorema 2.9 (Existencia del Operador Adjunto) *El operador adjunto de T dado en la Definición 2.19 existe, es único, y es un operador lineal acotado con norma*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Proposición 2.4 *Sean los operadores $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y α un escalar cualquiera. Entonces se cumplen las siguientes propiedades*

- i. $I_x^* = I_y$, así mismo $I_y^* = I_x$.
- ii. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
- iii. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.
- iv. $(T^*)^* = T$.
- v. $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$.
- vi. $T^* T = 0 \Leftrightarrow T = 0$.
- vii. $(ST)^* = S^* T^*$, asumiendo que $X = Y$.
- viii. $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, asumiendo que T es invertible.

Definición 2.20 El operador $T \in \mathcal{B}(X)$ en el espacio de Hilbert X es llamado

- i. *autoadjunto* o *hermitiano* si $T^* = T$.
- ii. *unitario* si T es biyectivo y $T^* = T^{-1}$.
- iii. *normal* si $TT^* = T^*T$.

2.3.2 Operador Proyección

Definición 2.21 El operador $P \in \mathcal{B}(X)$ en el espacio de Hilbert X es una proyección si y sólo si P es autoadjunta e idempotente (esto es $P^2 = P$).

Teorema 2.10 (Positividad de la Proyección) *Para cualquier proyección P en un espacio de Hilbert H , se cumple*

- i. $\langle Px, x \rangle_H = \|Px\|_H^2$ para todo $x \in H$.
- ii. $P \geq 0$.
- iii. $\|P\| \leq 1$ y $\|P\| = 1$ si $P(H) \neq \{0\}$.

2.4 Medida e Integral de Lebesgue

Sea X un conjunto dado. Decimos que Σ es un σ -álgebra de subconjuntos de X si verifica las siguientes condiciones:

- i. $\emptyset, X \in \Sigma$.

- ii. Si $A \in \Sigma$ entonces $X - A \in \Sigma$.
- iii. si $A_n \in \Sigma$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Definición 2.22 Sea X un conjunto dado y Σ un σ -álgebra de X , la aplicación

$$\mu : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+ \quad \left(\overline{\mathbb{R}}_0^+ = [0, +\infty] \right)$$

se denomina *medida* si satisface las siguientes condiciones

- i. $\mu(\emptyset) = 0$.
- ii. μ es numerablemente aditiva i.e. Si $\{A_n\}$ es una colección de conjuntos en Σ disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La terna (X, Σ, μ) se denomina *espacio de medida*.

Definición 2.23 Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y sea el conjunto $N \subset \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$, entonces decimos que N es un *conjunto de medida nula*.

Observación 2.5 Si P es una propiedad que es válida para todo $x \in X - N$ y $\mu(N) = 0$ entonces decimos que P es una propiedad que vale en casi todo punto de X .

Definición 2.24 Dado un conjunto $A \subset X$, la función $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A. \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

se denomina *función característica*.

Definición 2.25 Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, una función $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *simple* si existen constantes α_j con $j = 1, 2, \dots, n$ y conjuntos $A_j \subset \Sigma$ con $j = 1, 2, \dots, n$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}(x).$$

Definición 2.26 Sea (X, Σ, μ) el espacio de medida de Lebesgue. Dada una función simple

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j},$$

definimos su *integral de Lebesgue* por

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

Definición 2.27 Sea (X, Σ, μ) un espacio medido, sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ decimos que f es *medible* si dado $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\langle \alpha, +\infty \rangle)$$

pertenece a Σ .

Definición 2.28 Dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definimos las siguientes funciones $f^+, f^- : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0. \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

las cuales cumplen las siguientes propiedades:

- i. $f^+ + f^- = |f|$.
- ii. $f^+ - f^- = f$.
- iii. $f^+ = \text{máximo}\{f(x), 0\} \geq 0$.
- iv. $f^- = \text{máximo}\{-f(x), 0\} \geq 0$.

Definición 2.29 Sea (X, σ, μ) el espacio de medida de Lebesgue y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Definiremos la *integral de Lebesgue* de f por

$$\int_X f d\mu = \text{Sup} \left\{ \int_X \varphi d\mu ; \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Definición 2.30 Dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es *Lebesgue-integrable* si f es integrable y además

$$\int_X |f| d\mu < \infty,$$

en tal caso definimos la integral de Lebesgue por

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Definición 2.31 El conjunto de las funciones Lebesgue-integrables constituyen un espacio vectorial denotado por $\mathcal{L}^1(X)$,

$$\mathcal{L}^1(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} ; \int_X |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Análogamente podemos definir para $1 < p \leq \infty$ el espacio

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} ; \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ c.t.p. en X entonces decimos que f es *esencialmente acotado*. Si f es esencialmente acotado definimos su *supremo esencial* por

$$SupEss(f) = \inf \{M ; |f(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } X\},$$

Así definimos el espacio

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} ; SupEss|f| < \infty\}.$$

Definición 2.32 Decimos que f y g son *equivalentes* en el espacio de medida (X, σ, μ) si difieren en un conjunto de medida nula

i.e. $f \sim g$ si y sólo si $f - g = 0$ c.t.p. de X .

i.e. $f \sim g$ si y sólo si $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Esta relación de equivalencia da origen a la siguiente clase de equivalencia

$$f = \{g : X \rightarrow \mathbb{R} ; f \sim g\}.$$

Entonces denotando por $L^p(X)$ al conjunto de las clases de equivalencia tal que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, con $1 < p \leq \infty$, para el cual la aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : L^p(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \end{aligned}$$

define una norma en $L^p(X)$. En adelante nos referiremos a los elementos de $L^p(X)$ como funciones (en realidad son clases de equivalencia). Sobre $L^p(X)$ podemos definir la métrica

$$d(f, g) = \left(\int_X |f - g|^p d\mu\right)^{1/p},$$

con esta métrica, el espacio L^p resulta ser completo.

2.5 Espacios $L^p(\mathbb{K})$

2.5.1 Teoremas importantes

Teorema 2.11 (Convergencia dominada de Lebesgue) Sea $X \subseteq L^p(\mathbb{K})$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable no negativa y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

i. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. $x \in X$,

ii. $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Entonces f es integrable y además

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n(x) d\mu$$

Teorema 2.12 (Fundamental del Cálculo) Sea I un intervalo de números reales, y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable según Lebesgue en I . Sea $a \in I$ fijo, y definamos la función

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \text{ para todo } t \in I.$$

Entonces F es continua en I . Además, si f es continua en un punto $t_0 \in I$ entonces F es derivable en t_0 y

$$F'(t_0) = f(t_0).$$

Teorema 2.13 (Derivación bajo el signo de la Integral) Sea I un intervalo en \mathbb{R} , X un conjunto medible según Lebesgue, y $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

- i. Para todo $t \in I$ la función $f(., t)$ es medible en X , y existe $t_0 \in I$ tal que $f(., t_0)$ es integrable en X .
- ii. Para casi todo $x \in X$ la función $f(x, .)$ es de clase C^1 en I .
- iii. Existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrable según Lebesgue en X tal que para todo $t \in I$ y para casi todo $x \in X$ se tiene

$$\left| \frac{df}{dt}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Entonces la función $F(t) = \int_X f(x, t)dx$ es de clase C^1 en I y

$$F'(t) = \int_X \frac{df}{dt}(x, t)dx.$$

Teorema 2.14 (Fubini) Sea X un conjunto medible según Lebesgue y sean los rectángulos $A, B \subseteq X$, definimos $R = A \times B$, y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. entonces las funciones

$$G(x) = \int_{\underline{B}} f(x, y)dy \text{ y } H(x) = \int_{\overline{B}} f(x, y)dy,$$

son integrables en A , y además se verifica

$$\int_R f(x, y)dxdy = \int_A G(x)dx = \int_A H(x)dx.$$

2.5.2 Operadores Traslación y Dilatación

Definición 2.33 Dado un número real h , definimos el *operador traslación* como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_h : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{T}_h(f) \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{T}_h(f)(x) = f(x - h). \quad (2.1)$$

Definición 2.34 Dado un número entero j , definimos el *operador dilatación* como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_j : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{D}_j(f)\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{D}_j(f)(x) = \frac{1}{j} f\left(\frac{x}{j}\right). \quad (2.2)$$

Definición 2.35 Dado un número entero j , definimos el *operador dilatación diádico* como

$$\begin{aligned}D_j : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto D_j(f)\end{aligned}$$

donde

$$D_j(f)(x) = f(2^j x). \quad (2.3)$$

Proposición 2.5 Los operadores \mathcal{T}_h y D_j cumplen las siguientes propiedades

- i. \mathcal{T}_h y D_j son invertibles.
- ii. $\mathcal{T}_h^{-1} = \mathcal{T}_{-h}$, y $D_j^{-1} = D_{-j}$.
- iii. \mathcal{T}_h y $2^{j/2} D_j$ son isometrías en $L^2(\mathbb{R})$.

2.6 Análisis de Fourier

2.6.1 Series de Fourier

Definición 2.36 Si una función f se expresa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

es de esperarse que los coeficientes a_n y b_n estén íntimamente ligados a la función f .

Integrando obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

y para los demás coeficientes igualmente se integra, utilizando las relaciones de ortogonalidad de la integral del seno por el coseno de $-L$ a L , obteniendo

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0. \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (2.5)$$

Entonces para la función periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de periodo $2L$ integrable y absolutamente integrable en cada intervalo limitado, en particular en

$$\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty.$$

Los números a_n y b_n , dados en (2.4) y (2.5) respectivamente, son conocidos como los *coeficientes de Fourier* de la función f .

Definición 2.37 Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $2L$ -periódica integrable y absolutamente integrable, podemos calcular sus coeficientes de Fourier por las expresiones (2.4) y (2.5), así mismo podemos escribir

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (2.6)$$

Esto significa que la expresión del lado derecho es una serie de f .

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será *seccionalmente continua* si tiene apenas un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo cerrado. En otras palabras, para $a < b$ existen $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b$, tal que f es continua en cada intervalo abierto $\langle a_j, a_{j+1} \rangle$ para $j = 1, \dots, n-1$ y existen los límites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{y} \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será *seccionalmente diferenciable* si f y f' son seccionalmente continuas.

Teorema 2.15 (Fourier) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente diferenciable y $2L$ -periódica, entonces la serie de Fourier de la función f dada en (2.6), converge en cada punto x para

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Definición 2.38 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $2L$ -periódica, integrable y absolutamente integrable, entonces utilizando la formula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

la serie de Fourier de f puede ser escrita en la forma

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Teorema 2.16 (Teorema de las Series de Fourier) Para cualquier conjunto ortonormal $\{\psi_n\}$ en un espacio de Hilbert H , las siguientes afirmaciones son equivalentes

i. Cada $f \in H$ puede ser representada por Series de Fourier en H , esto es

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \psi_i \rangle_H \psi_i$$

ii. Para cualquier $f, g \in H$ se cumple

$$\langle f, g \rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \psi_i \rangle_H \langle g, \psi_i \rangle_H$$

iii. Para cualquier $f \in H$, se cumple

$$\|f\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \langle f, \psi_i \rangle_H \right|^2$$

iv. Cualquier subespacio $Y \subset H$ que contiene a $\{\psi_n\}$ es denso en H .

2.6.2 Transformada de Fourier

Definición 2.39 Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R})$, la función \widehat{f} definida por la expresión

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} f(x) dx.$$

es llamada *Transformada de Fourier* de f .

Observación 2.6 Se suelen usar las siguientes notaciones para la Transformada de Fourier

$$\widehat{f} \cong \mathcal{F}\{f(x)\},$$

la segunda notación es usada con frecuencia cuando se aplica la Transformada de Fourier a una composición de funciones o casos afines.

Proposición 2.6 La Transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ cumple las siguientes propiedades

i. \widehat{f} es continua.

ii. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}.$$

Teorema 2.17 (Riemman - Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces se cumple

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \left| \widehat{f}(w) \right| = 0$$

Proposición 2.7 Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier cumple las siguientes propiedades

i. *Traslación*

$$\mathcal{F}\left\{e^{i\alpha x} f(x)\right\}(w) = \widehat{f}(w - \alpha).$$

ii. *Alternación*

$$\mathcal{F}\{f(x - u)\}(w) = \widehat{f}(w) e^{i w u}.$$

iii. Escalado

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x)\}(w) = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{w}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

iv. Conjugación

$$\mathcal{F}\{\overline{f(x)}\}(w) = \overline{\mathcal{F}\{f(-x)\}(w)}.$$

Teorema 2.18 Sea f una función continua y seccionalmente diferenciable, tal que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ y $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, entonces se cumple

$$\mathcal{F}\{f'\}(w) = iw \widehat{f}(w).$$

Corolario 2.1 Si f es una función continua y n -veces seccionalmente diferenciable, tal que $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ y $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$. Entonces se cumple

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}\}(w) = (iw)^n \widehat{f}(w).$$

Definición 2.40 Dadas las funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definimos su *convolución* por la siguiente expresión

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

La integral anterior converge uniformemente en $L^1(\mathbb{R})$ y además se cumple $f * g = g * f$.

Proposición 2.8 Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces se cumple

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} * \mathcal{F}\{g(x)\}.$$

Definición 2.41 Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{f_n\}$ una sucesión, de funciones continuas con soporte compacto, convergente a f en $L^2(\mathbb{R})$, esto es

$$\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0.$$

Entonces la Transformada de Fourier de f es definida como

$$\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n},$$

donde el límite es con respecto a la norma en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.19 (Plancherel) Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ existe $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

i. si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x) dx.$$

ii. $\left\| \widehat{f} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-iwx} f(x) dx \right\|_2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

$$iii. \left\| \widehat{f} \right\|_2 = \|f\|_2.$$

Teorema 2.20 (Plancherel - Parseval) Dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(x)\}(w) \overline{\mathcal{F}\{g(x)\}(w)} dw.$$

i.e.

$$\langle f, g \rangle_2 = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle_2.$$

Capítulo 3

Ondículas

3.1 Ondícula

Definición 3.1 Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada *ondícula* si tiene media cero en \mathbb{R} , esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (3.1)$$

Proposición 3.1 Si $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ satisface

$$c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty, \quad (3.2)$$

donde $\widehat{\psi}$ es la Transformada de Fourier de ψ entonces (3.1) es satisfecha.

La condición (3.2) es llamada *condición de admisibilidad de ondícula*.

Demostración. Demostraremos que una función $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $c_\psi < \infty$ cumple (3.1). Primero notemos que

$$\widehat{\psi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt,$$

entonces decir que $\widehat{\psi}(0) = 0$ es equivalente a decir $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. Para probar la implicación de la proposición utilizamos el método de contradicción para lo cual suponemos que

$$\widehat{\psi}(0) \neq 0.$$

De la continuidad de la Transformada de Fourier, tenemos que existe

$$\varepsilon > 0 \text{ tal que } \widehat{\psi}(w) \neq 0 \text{ c.t.p. } w \in I_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Como $\widehat{\psi}$ es continua entonces es acotada en I_ε , así existen $m, M > 0$ tales que

$$m \leq |\widehat{\psi}(w)| \leq M \text{ c.t.p. } w \in I_\varepsilon.$$

Con estas consideraciones tenemos

$$c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw = 2\pi \int_{I_\varepsilon} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw + 2\pi \int_{\mathbb{R}-I_\varepsilon} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw,$$

es decir

$$c_\psi = 2\pi \int_{I_\varepsilon} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw + 2\pi \int_{\mathbb{R}-I_\varepsilon} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw. \quad (3.3)$$

Analicemos cómo se comportan las integrales anteriores, veamos que la segunda integral de (3.3) es finita ya que para ε dado, tenemos $|w| \geq \varepsilon$ entonces $\varepsilon^{-1} \geq |w|^{-1}$ y por el Teorema de Plancherel tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}-I_\varepsilon} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw &\leq \int_{\mathbb{R}-I_\varepsilon} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{\varepsilon} dw \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(w)|^2 dw \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|\psi\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Ahora veamos que la primera integral de (3.3) no es finita

$$\begin{aligned} \int_{I_\varepsilon} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw &\geq \int_{I_\varepsilon} \frac{m^2}{|w|} dw \\ &= m^2 \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\varepsilon}^{-k} \frac{dw}{|w|} + \int_k^\varepsilon \frac{dw}{|w|} \right] \\ &= 2m^2 \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^\varepsilon \frac{dw}{|w|} \\ &= 2m^2 \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^\varepsilon \frac{dw}{w} \\ &= 2m^2 \lim_{k \rightarrow 0^+} [\ln \varepsilon - \ln k] = +\infty. \end{aligned}$$

Así tenemos que $c_\psi = +\infty$ lo cual es una contradicción ya que $c_\psi < \infty$ por lo tanto

$$\widehat{\psi}(0) = 0, \text{ es decir } \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0.$$

Esto es, si ψ satisface la condición de admisibilidad de ondícula, entonces ψ es una ondícula.

■

Ahora veamos el comportamiento de la derivada y la integral de un ondícula, mostraremos bajo qué condiciones estas también son ondículas.

Lema 3.1 Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ una función no nula y n -veces diferenciable ($n \geq 1$) tal que $\varphi^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\psi(x) = \varphi^{(n)}(x)$$

es una ondícula.

Demostración. En esta demostración utilizamos la condición de admisibilidad de ondícula, para ello notemos que de la fórmula de la Transformada de Fourier para la derivada tenemos

$$\widehat{\psi}(w) = \widehat{\varphi^{(n)}}(w) = (iw)^n \widehat{\varphi}(w),$$

luego

$$\left| \widehat{\psi}(w) \right| = |(iw)^n \widehat{\varphi}(w)| = |(iw)^n| |\widehat{\varphi}(w)| = |w|^n |\widehat{\varphi}(w)|.$$

Esto es

$$\left| \widehat{\psi}(w) \right| = |w|^n |\widehat{\varphi}(w)|. \quad (3.4)$$

Ahora estimemos c_ψ

$$\begin{aligned} c_\psi &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|w|^{2n} |\widehat{\varphi}(w)|^2}{|w|} dw, \end{aligned}$$

reemplazando (3.4), tenemos

$$\begin{aligned} c_\psi &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |w|^{2n-1} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw \\ &= 2\pi \int_{|w| \leq 1} |w|^{2n-1} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw + 2\pi \int_{|w| > 1} |w|^{2n-1} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw \end{aligned}$$

Acotaremos las integrales anteriores por medio de los valores de $|w|$, ya que

- i. Si $|w| \leq 1$ entonces $|w|^{2n} \leq 1$.
- ii. Si $|w| > 1$ entonces $|w|^{2n-1} < |w|^{2n}$.

Entonces de lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} c_\psi &= 2\pi \int_{|w| \leq 1} |w|^{2n-1} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw + 2\pi \int_{|w| > 1} |w|^{2n-1} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw \\ &< 2\pi \int_{|w| \leq 1} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw + 2\pi \int_{|w| > 1} |w|^{2n} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw \\ &= 2\pi \int_{|w| \leq 1} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw + 2\pi \int_{|w| > 1} |(iw)^n \widehat{\varphi}(w)|^2 dw \\ &\leq 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw + 2\pi \int_{\mathbb{R}} |(iw)^n \widehat{\varphi}(w)|^2 dw, \end{aligned}$$

gracias al teorema de Plancherel, tenemos

$$c_\psi = 2\pi \left(\|\widehat{\varphi}\|_2^2 + \|\widehat{\varphi^{(n)}}\|_2^2 \right) = 2\pi \left(\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi^{(n)}\|_2^2 \right) < \infty.$$

luego por la Proposición 3.1 tenemos que ψ es una ondícula. ■

Lema 3.2 Sea $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ una función no nula con

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \psi(x) dx < \infty \text{ para } \beta > \frac{1}{2},$$

entonces

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$$

es una ondícula.

Demostración. Basaremos esta prueba en el Lema 3.1, es decir demostraremos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\varphi' \in L^2(\mathbb{R})$, para lo cual asumimos sin pérdida de generalidad que $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, pues si $\beta > 1$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \psi(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \psi(x) dx < \infty,$$

así normalizamos β para poder aplicar la siguiente desigualdad

$$(1 + |x|)^\beta \leq 1^\beta + |x|^\beta \leq 1 + |x|^\beta \text{ con } \frac{1}{2} < \beta \leq 1. \quad (3.5)$$

Denotemos los conjuntos

$$A = \{x; \psi(x) \geq 0\} \quad y \quad B = \{x; \psi(x) < 0\},$$

y en vista de la desigualdad (3.5) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^\beta |\psi(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dx \\ &= \|\psi\|_1 + \int_A |x|^\beta \psi(x) dx + \int_B |x|^\beta |\psi(x)| dx \\ &= \|\psi\|_1 + \int_A |x|^\beta \psi(x) dx - \int_B |x|^\beta \psi(x) dx, \end{aligned}$$

como se cumple que $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \psi(x) dx < \infty$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \psi(x) dx = \int_A |x|^\beta \psi(x) dx + \int_B |x|^\beta \psi(x) dx < \infty,$$

es decir cada sumando es finito, ya que A y B son conjuntos disjuntos, entonces tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^\beta |\psi(x)| dx \leq \|\psi\|_1 + \int_A |x|^\beta \psi(x) dx - \int_B |x|^\beta \psi(x) dx < \infty$$

de esta forma, la función $f(t) = (1 + |t|)^\beta \psi(t)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$.

Del Teorema Fundamental del Cálculo, podemos decir que la función

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t)dt \text{ es diferenciable c.t.p. } x \in \mathbb{R},$$

y también $\varphi'(x) = \psi(x)$ c.t.p. $x \in \mathbb{R}$, para acotar esta función analizaremos su comportamiento para los valores positivos y negativos de x

i. Consideremos $x \leq 0$, entonces

$$|\varphi(x)| = \left| \int_{-\infty}^x \psi(t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^x |\psi(t)|dt = \int_{-\infty}^x \frac{(1+|t|)^\beta}{(1+|t|)^\beta} |\psi(t)|dt,$$

como $-\infty < t \leq x \leq 0$, se tiene $(1+|t|)^{-\beta} \leq (1+|x|)^{-\beta}$, así tenemos

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(1+|x|)^\beta} \int_{-\infty}^x (1+|t|)^\beta |\psi(t)|dt,$$

luego podemos concluir que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$|\varphi(x)| = \left| \int_{-\infty}^x \psi(t)dt \right| \leq \frac{1}{(1+|x|)^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^\beta |\psi(t)|dt = \frac{\|f\|_1}{(1+|x|)^\beta}.$$

ii. Cuando $x > 0$, utilizamos la hipótesis $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$, esto es

$$\int_{-\infty}^x \psi(t)dt + \int_x^{\infty} \psi(t)dt = 0,$$

luego tenemos

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t)dt = - \int_x^{\infty} \psi(t)dt.$$

En vista del procedimiento anterior ($x \leq 0$), para casi todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$|\varphi(x)| = \left| - \int_x^{\infty} \psi(t)dt \right| \leq \frac{\|f\|_1}{(1+|x|)^\beta}.$$

Así concluimos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple

$$|\varphi(x)| \leq \frac{\|f\|_1}{(1+|x|)^\beta},$$

con esta desigualdad demostraremos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. En efecto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^{2\beta}} \|f\|_1^2 dx \\ &= \|f\|_1^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+|x|)^{2\beta}} \\ &= 2\|f\|_1^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^{2\beta}} < \infty, \end{aligned}$$

pues al ser $2\beta > 1$, podemos usar el hecho que para $\alpha > 1$ la siguiente integral es finita

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx < \infty.$$

Así obtenemos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y del Teorema Fundamental del Cálculo ya vimos que $\varphi' = \psi \in L^2(\mathbb{R})$, entonces por el Lema 3.1 tenemos que φ es una ondícula. ■

Corolario 3.1 *Para cada función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ no nula, con soporte compacto, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i. *La función ψ es una ondícula.*

ii. *La relación (3.2) se cumple.*

Demostración. Primero observemos que al ser el $Supp(\psi)$ compacto entonces es cerrado y acotado, así se cumple la inmersión

$$L^2(Supp(\psi)) \subset L^1(Supp(\psi)),$$

Del hecho que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y de lo anterior tenemos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_{Supp(\psi)} |\psi(x)| dx \leq c \int_{Supp(\psi)} |\psi(x)|^2 dx < \infty,$$

luego $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, ya que ψ se anula fuera de su soporte, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx = \int_{Supp(\psi)} |\psi(x)| dx + \int_{\mathbb{R}-Supp(\psi)} |\psi(x)| dx = \int_{Supp(\psi)} |\psi(x)| dx < \infty.$$

Así tenemos que $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo la relación (3.2), entonces por la Proposición 3.1 tenemos que ψ es una ondícula. Esto prueba la segunda implicación.

Ahora probemos la primera implicación, como $Supp(\psi)$ es acotado, tenemos que

$$\text{existe } M > 0 \text{ tal que } |x| < M \text{ para todo } x \in Supp(\psi),$$

por consiguiente se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| dx = \int_{Supp(\psi)} |x||\psi(x)| dx \leq M \int_{Supp(\psi)} |\psi(x)| dx = M \|\psi\|_1 < \infty.$$

De manera análoga se puede ver que $x\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Así $x\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ por ende $-ix\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, antes de ver que esta última función es una Transformada de Fourier de particular interés para nosotros, primero consideremos la función $f(x, w) = e^{-ixw}\psi(x)$ entonces vemos que

- i. $f(x, \cdot)$ es absolutamente continua en \mathbb{R} para casi todo $x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f(\cdot, w)$ es medible según Lebesgue en \mathbb{R} para casi todo $w \in \mathbb{R}$ y además es integrable para al menos un cierto $w_0 \in \mathbb{R}$.

Estas condiciones implican que $\frac{\partial f}{\partial w}(x, w)$ está definida en casi todo $(x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, además tenemos que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial w}(x, w) \right| = |-ixe^{-ixw}\psi(x)| \leq |x\psi(x)| \text{ para todo } (x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

entonces por el teorema de derivación bajo la integral se cumple

$$\frac{d}{dw} \int_{\mathbb{R}} f(x, w) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial w}(x, w) dx \text{ c.t.p. } w \in \mathbb{R}.$$

Así vemos que

$$\widehat{\psi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw}\psi(x) dx,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\psi}}{dw}(w) &= \frac{d}{dw} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, w) dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial w}(x, w) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw}(-ix)\psi(x) dx \\ &= \mathcal{F}\{-ix\psi(x)\}(w). \end{aligned}$$

Lo cual existe ya que $-ix\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, así podemos decir que $\frac{d}{dw}\widehat{\psi}$ es continua, además por el Teorema de Riemman-Lebesgue tenemos

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \frac{d}{dw}\widehat{\psi}(w) = \lim_{|w| \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{-ix\psi(x)\}(w) = 0,$$

es decir $\frac{d}{dw}\widehat{\psi}$ es acotada, entonces $\frac{d}{dw}\widehat{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Denotemos por

$$M = \left\| \frac{d}{dw}\widehat{\psi} \right\|_{\infty} = \text{SupEss} \left\{ \left| \frac{d}{dw}\widehat{\psi}(w) \right| ; |w| \leq 1 \right\}.$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio para derivadas a $\frac{d}{dw}\widehat{\psi}$, obtenemos que existe $w_0 \in [0, w]$ tal que

$$\frac{d}{dw}\widehat{\psi}(w_0) = \frac{\widehat{\psi}(w) - \widehat{\psi}(0)}{w - 0},$$

al ser ψ un ondícula se cumple $\widehat{\psi}(0) = 0$, así la expresión anterior queda como

$$w \frac{d}{dw}\widehat{\psi}(w_0) = \widehat{\psi}(w).$$

Ahora con la relación anterior acotaremos $\widehat{\psi}$, en efecto se tiene

$$|\widehat{\psi}(w)| = \left| w \frac{d}{dw} \widehat{\psi}(w_0) \right| = |w| \left| \frac{d}{dw} \widehat{\psi}(w_0) \right| \leq |w|M,$$

luego

$$|\widehat{\psi}(w)| \leq |w|M \quad \text{c.t.p. } w \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

Ahora veamos que c_ψ es finito, en efecto

$$\begin{aligned} c_\psi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \\ &= \int_{|w| \leq 1} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw + \int_{|w| > 1} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw, \end{aligned}$$

como $|w| < 1$ entonces $|w|^{-1} < 1$, así tenemos

$$c_\psi \leq \int_{|w| \leq 1} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw + \int_{|w| > 1} |\widehat{\psi}(w)|^2 dw,$$

reemplazando (3.6), tenemos

$$\begin{aligned} c_\psi &\leq \int_{|w| \leq 1} \frac{M^2 |w|^2}{|w|} dw + \int_{|w| > 1} |\widehat{\psi}(w)|^2 dw \\ &= \int_{|w| \leq 1} M^2 |w| dw + \int_{|w| > 1} |\widehat{\psi}(w)|^2 dw \\ &\leq M^2 \int_{|w| \leq 1} |w| dw + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(w)|^2 dw \\ &= M^2 + \int_{\mathbb{R}} |\psi(w)|^2 dw \\ &= M^2 + \|\psi\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Así queda probada la equivalencia de (i) y (ii) siempre y cuando $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y tiene soporte compacto. ■

Teorema 3.1 *Sea ψ una ondícula con soporte compacto y φ una función integrable y acotada, entonces la convolución $\psi * \varphi$ es una ondícula.*

Demostración. Como ψ es una ondícula con soporte compacto, por el Corolario 3.1 tenemos $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y además se cumple $c_\psi < \infty$, como φ es integrable y acotada entonces es absolutamente integrable así tenemos $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Para demostrar que la convolución $\psi * \varphi$ es una ondícula utilizamos la Proposición 3.1 esto es, mostraremos que $\psi * \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ cumpliendo $c_{\psi * \varphi} < \infty$.

Empezamos probando que $\psi * \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, para lo cual primero denotemos $f(x, t) = |\psi(x-t)||\varphi(t)|$, así tenemos que f es integrable al ser producto de dos funciones integrables, además f es acotada ya que

$$|f(x, t)| = |\psi(x-t)||\varphi(t)| < \|\psi\|_1 \|\varphi\|_\infty \text{ para todo } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Así tenemos que f es integrable y acotada por ende es absolutamente integrable, ahora denotamos como

$$f_x(t) = f(x, t) \text{ con } x \text{ fijo y } t \in \mathbb{R}.$$

$$f_t(x) = f(x, t) \text{ con } t \text{ fijo y } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces vemos que f_x y f_t son integrables, ya que f es integrable, así por el Teorema de Fubini tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx dt.$$

Ahora continuemos con la demostración de $\psi * \varphi \in L^1(\mathbb{R})$, notemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t)\varphi(t) dt \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)\varphi(t)| dt dx,$$

como ya vimos por el Teorema de Fubini tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)||\varphi(t)| dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)||\varphi(t)| dx dt,$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)| dx dt,$$

y como $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ y $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)| dx \leq \|\psi\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt = \|\psi\|_1 \|\varphi\|_1 < \infty.$$

Ahora veamos que $\psi * \varphi \in L^2(\mathbb{R})$, notemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t)\varphi(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)\varphi(t)| dt \right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)||\varphi(t)| dt \right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)||\varphi(t)|^{\frac{1}{2}} |\varphi(t)|^{\frac{1}{2}} dt \right)^2 dx, \end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)|^2 |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \right) dx.$$

Es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)|^2 dx \leq \|\varphi\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)|^2 |\varphi(t)| dt \right) dx. \quad (3.7)$$

Ahora definimos $g(x, t) = |\psi(x-t)|^2 |\varphi(t)|$, y procedemos análogamente al caso cuando $f(x, t) = |\psi(x-t)| |\varphi(t)|$ para concluir que, por el Teorema de Fubini, se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dt dx. \quad (3.8)$$

Luego de (3.7) y (3.8) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)|^2 dx &\leq \|\varphi\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)|^2 |\varphi(t)| dx dt \\ &= \|\varphi\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)|^2 dx dt \\ &= \|\varphi\|_1 \|\psi\|_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \\ &= \|\varphi\|_1^2 \|\psi\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Es decir $\psi * \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Ahora estimemos $c_{\psi * \varphi}$ usando las propiedades de la Transformada de Fourier

$$\begin{aligned} c_{\psi * \varphi} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{(\psi * \varphi)}(w)|^2}{|w|} dw \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sqrt{2\pi} \widehat{\psi}(w) \widehat{\varphi}(w)|^2}{|w|} dw \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2 |\widehat{\varphi}(w)|^2}{|w|} dw. \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$c_{\psi * \varphi} = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw. \quad (3.9)$$

Veamos que la Transformada de Fourier de φ es acotada

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}(w)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} \varphi(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ixw}| |\varphi(x)| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx = \frac{\|\varphi\|_1}{\sqrt{2\pi}} < \infty. \end{aligned}$$

Así tenemos

$$|\widehat{\varphi}(w)| \leq \frac{\|\varphi\|_1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.10)$$

Reemplazando (3.10) en (3.9) obtenemos

$$c_{\psi * \varphi} \leq 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} \frac{\|\varphi\|_1}{\sqrt{2\pi}} dw = \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_1 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw.$$

Es decir

$$c_{\psi * \varphi} \leq \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_1 c_\psi < \infty.$$

Entonces por la Proposición 3.1 resulta que $\psi * \varphi$ es una ondícula. ■

Teorema 3.2 *Sea*

$$A = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) ; \psi \neq 0, \psi \text{ tiene soporte compacto y } \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \right\}.$$

Entonces A es un conjunto denso en el espacio de funciones de $L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto.

Demostración. Probemos que para una función $h \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto existe una sucesión de funciones $\{h_\varepsilon\} \subset A$ tal que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se cumple que

$$h_\varepsilon \rightarrow h \text{ en } L^2(\mathbb{R}).$$

Sea $h \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto, entonces gracias al Teorema de Plancherel tenemos

$$\|\widehat{h}\|_2^2 = \|h\|_2^2 < \infty \quad \text{i.e.} \quad \widehat{h} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Así para cada ε podemos definir $h_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$, con soporte compacto, tal que

$$\widehat{h}_\varepsilon(w) = \begin{cases} \widehat{h}(w) & \text{Si } |w| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{Si } |w| < \varepsilon \end{cases}$$

entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} c_{h_\varepsilon} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{h}_\varepsilon(w)|^2}{|w|} dw \\ &= 2\pi \int_{|w| \geq \varepsilon} \frac{|\widehat{h}_\varepsilon(w)|^2}{|w|} dw + 2\pi \int_{|w| < \varepsilon} \frac{|\widehat{h}_\varepsilon(w)|^2}{|w|} dw \\ &\leq 2\pi \int_{|w| \geq \varepsilon} \frac{|\widehat{h}(w)|^2}{\varepsilon} dw = \frac{2\pi}{\varepsilon} \int_{|w| \geq \varepsilon} |\widehat{h}(w)|^2 dw \\ &\leq \frac{2\pi}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(w)|^2 dw \\ &= \frac{2\pi}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |h(w)|^2 dw \\ &= \frac{2\pi}{\varepsilon} \|h\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Como $h_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ tiene soporte compacto se cumple que $h_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ entonces por el Corolario 3.1 tenemos que h_ε es una ondícula, esto quiere decir que $h_\varepsilon \in A$.

Ahora veamos que $h_\varepsilon \rightarrow h$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

En efecto

$$\begin{aligned}\|h_\varepsilon - h\|_2^2 &= \|\widehat{h_\varepsilon - h}\|_2^2 = \|\widehat{h_\varepsilon} - \widehat{h}\|_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{h_\varepsilon}(w) - \widehat{h}(w)|^2 dw,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\|h_\varepsilon - h\|_2^2 &= \int_{|w| < \varepsilon} |\widehat{h_\varepsilon}(w) - \widehat{h}(w)|^2 dw + \int_{|w| \geq \varepsilon} |\widehat{h_\varepsilon}(w) - \widehat{h}(w)|^2 dw \\ &= \int_{|w| < \varepsilon} |0 - \widehat{h}(w)|^2 dw + \int_{|w| \geq \varepsilon} |\widehat{h}(w) - \widehat{h}(w)|^2 dw \\ &= \int_{|w| < \varepsilon} |\widehat{h}(w)|^2 dw = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\widehat{h}(w)|^2 dw.\end{aligned}$$

Así tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_\varepsilon - h\|_2^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\widehat{h}(w)|^2 dw = 0.$$

Esto significa que cada función $h \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto es el límite de una sucesión de ondículas $\{h_\varepsilon\} \subset A$ i.e. A es denso en el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto. ■

Observación 3.1 A partir de ahora consideraremos a las ondículas como funciones en $L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto para poder utilizar la equivalencia entre ser ondícula y satisfacer la condición de admisibilidad de ondícula.

3.2 Transformada Continua de Ondícula

Definición 3.2 (TCO) La *transformada continua de ondícula* T_ψ de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con respecto a la ondícula ψ es definida por

$$T_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (3.11)$$

donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ y $\overline{\psi}$ denota el conjugado complejo de ψ .

Observación 3.2 Si consideramos $\psi_{a,b}$ como una familia de funciones dada por

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, donde ψ es una función fija, llamada *ondícula madre*, entonces podemos escribir (3.11) como un producto interno en $L^2(\mathbb{R})$

$$T_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_2.$$

Proposición 3.2 Sean ψ y ϕ dos ondículas y $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces la transformada continua de ondícula cumple las siguientes propiedades:

i. Linealidad de la TCO respecto al argumento. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$T_\psi(\alpha f + \beta g)(a, b) = \alpha T_\psi f(a, b) + \beta T_\psi g(a, b).$$

ii. Traslación del argumento de la TCO. Para el Operador Traslación (2.1), se cumple

$$T_\psi \left(\mathcal{T}_h f \right) (a, b) = T_\psi f(a, b - h).$$

iii. Dilatación del argumento de la TCO. Para el Operador Dilatación (2.2), con $j \in \mathbb{R}^+$, se cumple

$$T_\psi \left(\mathcal{D}_j f \right) (a, b) = \frac{1}{\sqrt{j}} T_\psi f \left(\frac{a}{j}, \frac{b}{j} \right).$$

iv. Permutación del argumento con la ondícula. Esto sólo es posible cuando el argumento también es una ondícula, entonces para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se cumple

$$T_\psi \phi(a, b) = \overline{T_\phi \psi \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right)}.$$

v. Linealidad de la TCO respecto a la ondícula. Para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$T_{\alpha\psi + \beta\phi} f(a, b) = \alpha T_\psi f(a, b) + \beta T_\phi f(a, b).$$

vi. Para el operador $A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definido por $A(f)(x) = f(-x)$ se cumple

$$T_{A\psi} A f(a, b) = T_\psi f(a, -b).$$

vii. Traslación de la ondícula de la TCO, para el Operador Traslación (2.1), se cumple

$$T_{\mathcal{T}_h \psi} f(a, b) = T_\psi f(a, b + ha).$$

viii. Dilatación de la ondícula de la TCO, para el Operador Dilatación (2.2), se cumple

$$T_{\mathcal{D}_j \psi} f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{j}} T_\psi f(aj, b).$$

Demostración. Estas propiedades se prueban aplicando las propiedades de producto interno en $L^2(\mathbb{R})$, la definición de TCO y haciendo cambios de variable, veamos:

i. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} T_\psi(\alpha f + \beta g)(a, b) &= \langle \alpha f + \beta g, \psi_{a,b} \rangle_2 = \alpha \langle f, \psi_{a,b} \rangle_2 + \beta \langle g, \psi_{a,b} \rangle_2. \\ &= \alpha T_\psi f(a, b) + \beta T_\psi g(a, b) \end{aligned}$$

ii. Aplicamos el Operador Traslación (2.1), y luego el cambio de variable $s = t - h$, obteniendo

$$\begin{aligned} T_\psi(T_h f)(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} T_h f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t-h) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{\psi\left(\frac{s-b+h}{a}\right)} dt = T_\psi f(a, b-h). \end{aligned}$$

iii. Aplicamos el Operador Dilatación (2.2), y luego el cambio de variable $u = \frac{t}{j}$, obteniendo

$$\begin{aligned} T_\psi(D_j f)(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} D_j f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{j} f\left(\frac{t}{j}\right) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{\psi\left(\frac{ju-b}{a}\right)} du = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{j}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{\psi\left(\frac{u-b/j}{a/j}\right)} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{j}} \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{a}{j}\right|}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{\psi\left(\frac{u-b/j}{a/j}\right)} du = \frac{1}{\sqrt{j}} T_\psi f\left(\frac{a}{j}, \frac{b}{j}\right). \end{aligned}$$

iv. Permutación del argumento con la ondícula, tenemos que ϕ, ψ son ondículas, y hacemos el cambio de variable $u = \frac{t-b}{a}$, obteniendo

$$\begin{aligned} T_\psi \phi(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \frac{a}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \phi(au+b) \overline{\psi(u)} du \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{u+b/a}{1/a}\right) \overline{\psi(u)} du = \left\langle \phi_{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}}, \psi \right\rangle_2 \\ &= \overline{\left\langle \psi, \phi_{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}} \right\rangle_2} = \overline{T_\phi \psi\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)}. \end{aligned}$$

v. Para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned} T_{\alpha\psi+\beta\phi} f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{(\alpha\psi + \beta\phi)\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \alpha \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt + \beta \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \alpha T_\psi f(a, b) + \beta T_\phi f(a, b). \end{aligned}$$

vi. Aplicamos el operador A , dado en el enunciado, y luego hacemos el cambio de variable $u = -t$, obteniendo

$$T_{A\psi} A f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} A f(t) \overline{A \psi_{a,b}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(-t) \overline{\psi_{a,b}(-t)} dt$$

$$\begin{aligned}
T_{A\psi}Af(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(-t) \overline{\psi\left(\frac{-t+b}{a}\right)} dt = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) \overline{\psi\left(\frac{u+b}{a}\right)} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \overline{\psi\left(\frac{u+b}{a}\right)} du = T_{\psi}f(a, -b).
\end{aligned}$$

vii. Para el Operador Traslación (2.1), tenemos

$$\begin{aligned}
T_{T_h\psi}f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{T_h\psi_{a,b}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a} - h\right)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b-ah}{a}\right)} dt = T_{\psi}f(a, b+ah).
\end{aligned}$$

viii. Para el Operador Dilatación (2.2), tenemos

$$\begin{aligned}
T_{D_j\psi}f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{D_j\psi_{a,b}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{j} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{ja}\right)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{|ja|}} \frac{1}{\sqrt{j}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{ja}\right)} dt = \frac{1}{\sqrt{j}} T_{\psi}f(a, b).
\end{aligned}$$

Así terminamos la demostración de las propiedades anteriores. ■

Teorema 3.3 (Relación de Parseval para la Transformada de Ondícula) *Sea la función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface (3.2) i.e. ψ es una ondícula, entonces para cualquier $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, la formula siguiente es válida*

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\psi}f(a, b) \overline{T_{\psi}g(a, b)} \frac{dbda}{a^2}. \quad (3.12)$$

Demostración. Antes de demostrar la igualdad caracterizaremos los multiplicandos de la integral, para ello primero notemos que

$$\widehat{\psi_{a,b}}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iwt} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt,$$

haciendo el cambio de variable $z = \frac{t-b}{a}$ entonces $dz = \frac{dt}{a}$, así tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_{a,b}}(w) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iw(az+b)} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi(z)} dz \\
&= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iwaz} e^{-ixb} \overline{\psi(z)} dz \\
&= \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-ixb} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iwaz} \overline{\psi(z)} dz \\
&= \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-ixb} \widehat{\psi}(aw).
\end{aligned}$$

Es decir

$$\widehat{\psi_{a,b}}(w) = \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-ixb} \widehat{\psi}(aw). \quad (3.13)$$

Por otra parte, del Teorema de Plancherel - Parseval obtenemos

$$T_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_2 = \left\langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{a,b}} \right\rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi_{a,b}}(x)} dx. \quad (3.14)$$

Reemplazando (3.13) en (3.14) tenemos

$$\begin{aligned} T_\psi f(a, b) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-ixb} \widehat{\psi}(aw)} dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{ixb} \overline{\widehat{\psi}(ax)} dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \sqrt{2\pi} \mathcal{F} \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b). \end{aligned}$$

Es decir

$$T_\psi f(a, b) = \frac{a}{\sqrt{|a|}} \sqrt{2\pi} \mathcal{F} \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b). \quad (3.15)$$

Análogamente obtenemos

$$T_\psi g(a, b) = \frac{a}{\sqrt{|a|}} \sqrt{2\pi} \mathcal{F} \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b),$$

luego

$$\overline{T_\psi g(a, b)} = \frac{a}{\sqrt{|a|}} \sqrt{2\pi} \overline{\mathcal{F} \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b)}. \quad (3.16)$$

Con estas consideraciones demostraremos la relación (3.12), para lo cual denotamos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \overline{T_\psi g(a, b)} \frac{db da}{a^2},$$

utilizando las relaciones (3.15) y (3.16) obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{|a|} 2\pi \mathcal{F} \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \overline{\mathcal{F} \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b)} \frac{db da}{a^2} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \mathcal{F} \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \overline{\mathcal{F} \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b)} db da, \end{aligned}$$

de la propiedad de la Transformada de Fourier $\widehat{\psi}(-w) = \overline{\widehat{\psi}(w)}$, tenemos

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \overline{\mathcal{F} \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (b)} \mathcal{F} \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (b) db da,$$

y del Teorema de Plancherel - Parseval tenemos

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \overline{\widehat{f}(x)\widehat{\psi}(ax)} \widehat{g(x)}\widehat{\psi}(ax) dx da \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{\psi}(ax)} \widehat{g(x)}\widehat{\psi}(ax) dx da \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 dx da \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 dx \frac{da}{|a|},
\end{aligned}$$

utilizando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 da dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} \left(2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(ax)|^2}{|a|} da \right) dx,
\end{aligned}$$

luego hacemos el cambio de variable $u = ax$, para la integral entre paréntesis, obteniendo

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} \left(2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{|u|} du \right) dx \\
&= c_{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} dx = c_{\psi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_2,
\end{aligned}$$

aplicamos nuevamente el Teorema de Plancherel para concluir que

$$\langle f, g \rangle_2 = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_2 = \frac{1}{c_{\psi}} I.$$

Es decir

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\psi} f(a, b) \overline{T_{\psi} g(a, b)} \frac{db da}{a^2}.$$

Lo cual termina la demostración. ■

Teorema 3.4 (Calderón, Grossman, Morlet) Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo (3.2) entonces para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$, se cumplen las siguientes relaciones:

i. *Fórmula de Inversión*

$$f(t) = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\psi} f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{db da}{a^2} \quad (3.17)$$

ii. *Isometría*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |T_{\psi} f(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2} \quad (3.18)$$

Demostración. Para la prueba de (3.18) basta tomar $g = f$ en la Relación de Parseval, así tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \langle f, f \rangle_2 = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |T_\psi f(a, b)|^2 \frac{dbda}{a^2}.$$

Para probar (3.17) utilizamos la Proposición (2.2), sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y ψ una ondícula, de la Relación de Parseval para la Transformada de Ondícula, tenemos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_2 &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \overline{T_\psi g(a, b)} \frac{dbda}{a^2} \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt} \frac{dbda}{a^2} \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} \psi_{a,b}(t) dt \frac{dbda}{a^2} \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \overline{g(t)} \psi_{a,b}(t) dt \frac{dbda}{a^2}, \end{aligned}$$

utilizando el Teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_2 &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \overline{g(t)} \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2} \right) \overline{g(t)} dt \\ &= \frac{1}{c_\psi} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(\cdot) \frac{dbda}{a^2}, g \right\rangle_2. \end{aligned}$$

Así podemos concluir que

$$\langle c_\psi f, g \rangle_2 - \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(\cdot) \frac{dbda}{a^2}, g \right\rangle_2 = 0,$$

es decir, para todo $g \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple

$$\left\langle c_\psi f - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(\cdot) \frac{dbda}{a^2}, g \right\rangle_2 = 0,$$

luego por la Proposición 2.2 tenemos

$$c_\psi f - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(\cdot) \frac{dbda}{a^2} = 0.$$

Es decir

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2}.$$

Así terminamos con esta demostración. ■

3.3 Transformada Discreta de Ondícula

Esta sección trata sobre la discretización de la Transformada Rápida de Ondícula, ya que esta es la que se utiliza en cuestiones computacionales, y será utilizada en los últimos capítulos.

Adicionalmente, en el siguiente capítulo, veremos la relación intrínseca entre la TRO y los frames y gracias esta relación daremos una nueva definición de ondícula en función de bases de $L^2(\mathbb{R})$.

En aplicaciones prácticas, especialmente aquellas que involucran algoritmos rápidos, la Transformada Continuas de Ondícula sólo puede ser computada en una malla discreta de puntos (a_m, b_n) con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Para una ondícula madre ψ , tenemos asociado la familia de funciones

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \text{ para todo } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}.$$

Puesto que las ondículas son funciones de forma constante y tamaño variable, la discretización natural para los parámetros de localización y de escala b, a consiste en tomar sus valores de la forma $a = a_0^{-j}$ y $b = kb_0 a_0^{-j}$ donde $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ son parámetros fijos, obtenemos

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{a_0^{-j/2}} \psi\left(\frac{t - kb_0 a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right) \text{ para todo } j, k \in \mathbb{Z}.$$

Es decir

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{j/2} \psi\left(a_0^j t - kb_0\right) \text{ para todo } j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

Definición 3.3 (TDO) Dados a_0 y b_0 positivos, y $\psi_{j,k}$ como en (3.19). Entonces la *transformada discreta de ondícula* de la función f con respecto a la ondícula ψ , se define por el producto interno

$$T_{\psi_{j,k}}(f) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt \text{ para todo } j, k \in \mathbb{Z}.$$

Eligiendo adecuadamente ψ y los parámetros a_0 y b_0 es posible lograr que las funciones $\psi_{j,k}$ constituyan una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. En particular si se elige $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$, entonces existe ψ , con buenas propiedades de localización, tal que $\psi_{j,k}$ constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

3.4 Ejemplos

Ejemplo 3.1 (Ondícula de Haar) Sea la función

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Vemos que ψ cumple (3.1). En efecto

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \int_0^{1/2} \psi(x) dx + \int_{1/2}^1 \psi(x) dx = \int_0^{1/2} dx - \int_{1/2}^1 dx = 0$$

Su grafico es mostrado en la Figura 3.1.

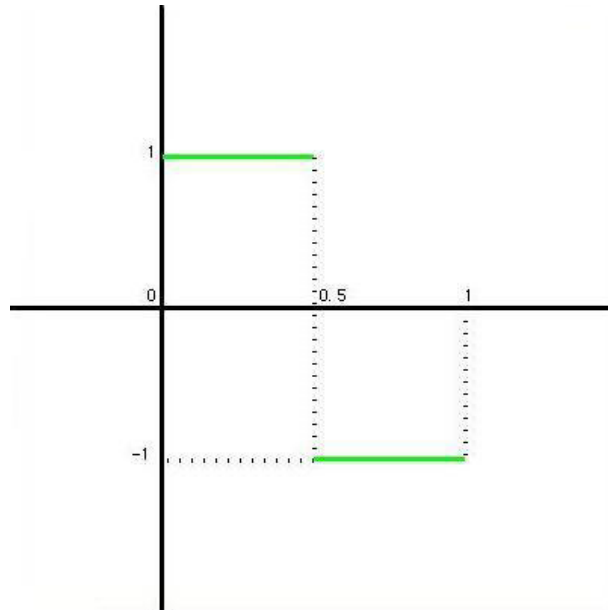


Figura 3.1: Ondícula de Haar

Ejemplo 3.2 Sea

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Vemos que ϕ cumple (3.1). En efecto

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = \int_{-1}^1 \phi(x) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

Su grafico es mostrado en la Figura 3.2.

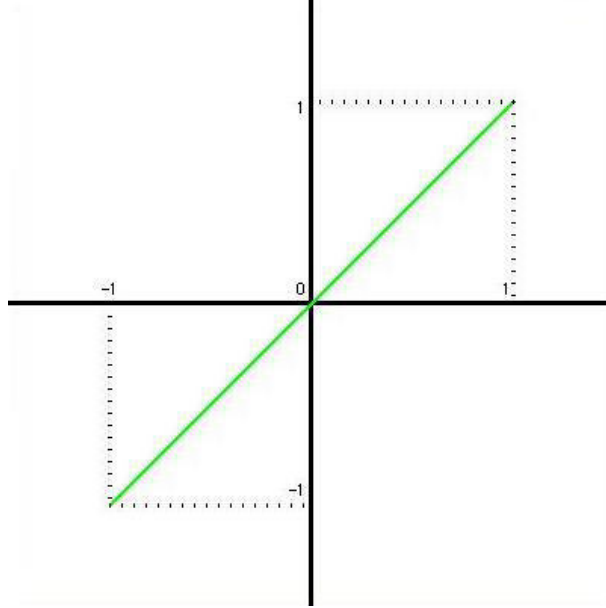


Figura 3.2: Ondícula definida en el Ejemplo 3.2

Ejemplo 3.3 Sea $n \in \mathbb{N}$ un número impar, $\alpha, a \in \mathbb{R}^+$ y consideremos

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Vemos que φ cumple (3.1). En efecto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-a}^a \varphi(x) dx = \int_{-a}^a \alpha x^n dx = \alpha \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_{-a}^a = \alpha \left(\frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{(-a)^{n+1}}{n+1} \right)$$

como n es impar tenemos que $n+1$ es par, por ende

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \alpha \left(\frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \right) = 0$$

En la Figura 3.3 vemos los gráficos de φ con los parámetros de la Tabla 3.1.

	<i>rojo</i>	<i>verde</i>	<i>azul</i>
a	3	3	3
α	1	0.5	0.2
n	1	2	3

Tabla 3.1: Parámetros para la ondícula φ

Ejemplo 3.4 (Ondícula Sombrero Mexicano) La función definida como

$$\psi(x) = (1 - x^2) e^{\frac{-x^2}{2}}$$

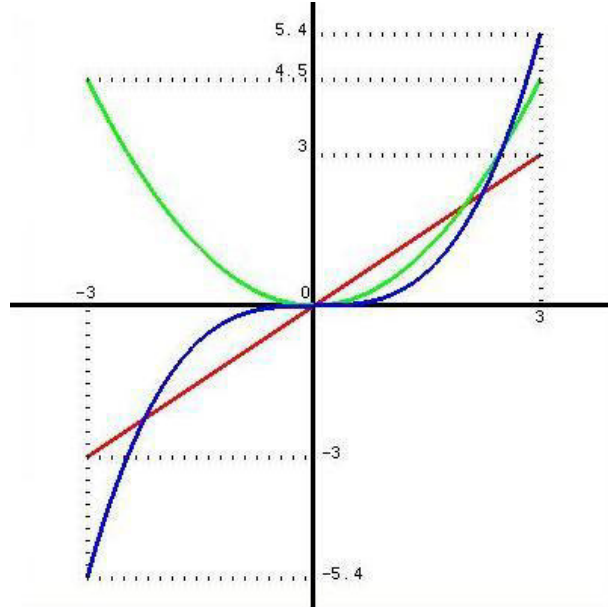


Figura 3.3: Ondícula definida en el Ejemplo 3.3

Es una ondícula. En efecto, ya que

$$\psi(x) = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Y como las funciones $-e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^2(\mathbb{R})$, entonces por el Lema 3.1 tenemos que ψ es una ondícula. su grafico se puede ver en la Figura 3.4.

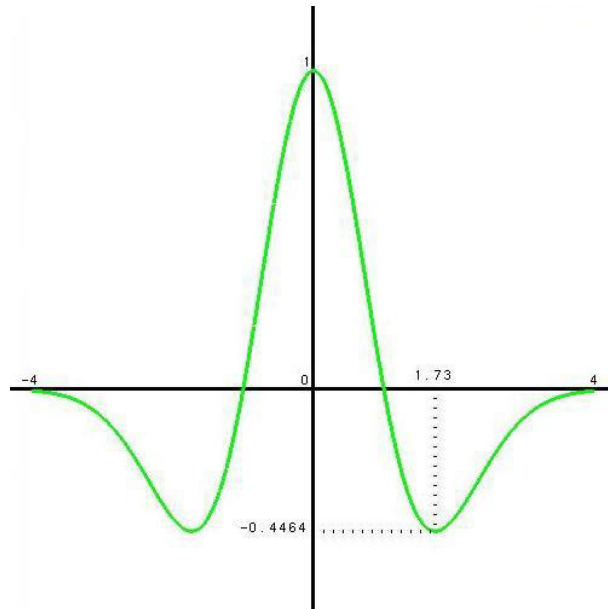


Figura 3.4: Ondícula Sombrero Mexicano

Capítulo 4

Frames

Recordando la definición de TDO, podemos hacer dos preguntas de vital importancia para la familia de funciones $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ obtenidas con la discretización $a = a_0^{-j}$ y $b = kb_0a_0^{-j}$.

- i. ¿la sucesión $\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ caracteriza completamente a f ?
- ii. ¿Es posible reconstruir f de manera numéricamente estable de la sucesión anterior?

Estas preguntas están estrechamente relacionadas al concepto de frames, el cual empezaremos a discutir.

4.1 Frame

Definición 4.1 Una sucesión $\{\varphi_n\}$ en un espacio de Hilbert H es llamada *frame* si existen constantes A, B con $0 < A \leq B$ tal que

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle_H \right|^2 \leq B\|f\|_H^2 \quad \text{para todo } f \in H, \quad (4.1)$$

las constantes A y B son llamadas *fronteras del frame*.

Observación 4.1 Si $A = B$, entonces se tiene la relación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle_H \right|^2 = A\|f\|_H^2 \quad \text{para todo } f \in H,$$

y en este caso el frame es llamado *frame estrecho*, además si $A = B = 1$, entonces el frame es ortonormal.

4.2 Operador Frame

Definición 4.2 Sea $\{\varphi_n\}$ un frame en un espacio de Hilbert H , entonces el operador $F : H \rightarrow \ell^2$ definido por

$$F(f) = \left\{ \langle f, \varphi_n \rangle_H \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

es llamado *operador sub-frame*.

El operador sub-frame está bien definido ya que

$$\|Ff\|_{\ell^2}^2 = \left\| \left\{ \langle f, \varphi_n \rangle_H \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle_H \right|^2 \leq B \|f\|_H^2 < \infty.$$

Proposición 4.1 *El operador sub-frame es lineal, acotado e invertible.*

Demostración. Consideremos el frame $\{\varphi_n\}$, al cual tenemos asociado el operador sub-frame F , entonces F es **lineal**. En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $f, g \in H$ entonces se cumple

$$\begin{aligned} F(\alpha f + \beta g) &= \left\{ \langle \alpha f + \beta g, \varphi_n \rangle_H \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \left\{ \langle \alpha f, \varphi_n \rangle_H + \langle \beta g, \varphi_n \rangle_H \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \alpha \left\{ \langle f, \varphi_n \rangle_H \right\}_{n \in \mathbb{Z}} + \beta \left\{ \langle g, \varphi_n \rangle_H \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \alpha Ff + \beta Fg. \end{aligned}$$

F es **acotado**. En efecto, notemos que

$$\|Ff\|_{\ell^2}^2 = \langle Ff, Ff \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle_H \right|^2,$$

y utilizando (4.1) obtenemos

$$\|Ff\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle_H \right|^2 \leq B \|f\|_H^2 \text{ para todo } f \in H.$$

Luego

$$\|Ff\|_{\ell^2}^2 \leq \sqrt{B} \|f\|_H \text{ para todo } f \in H.$$

F es **invertible**. En efecto sea $f \in H$, tal que $Ff = 0$, entonces se cumple

$$Ff = \left\{ \langle f, \varphi_n \rangle_H \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{0\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

es decir

$$\langle f, \varphi_n \rangle_H = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Y como $\{\varphi_n\}$ es un frame, entonces necesariamente $f = 0$, así por el Teorema 2.3 tenemos que F es invertible y además F^{-1} es lineal. ■

Definición 4.3 Sea F^* el *operador adjunto* del operador sub-frame F asociado al frame $\{\varphi_n\}$, esto es $F^* : \ell^2 \rightarrow H$, entonces para una sucesión arbitraria $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle F^*(\{\alpha_n\}), f \rangle_H &= \langle \{\alpha_n\}, Ff \rangle_{\ell^2} = \left\langle \{\alpha_n\}, \left\{ \langle f, \varphi_n \rangle_H \right\} \right\rangle_{\ell^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\langle f, \varphi_n \rangle_H}. \end{aligned}$$

Es decir

$$\langle F^* (\{\alpha_n\}), f \rangle_H = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n, f \right\rangle_H.$$

Así concluimos que el operador adjunto F^* tiene la forma

$$F^* (\{\alpha_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n. \quad (4.2)$$

La serie anterior es convergente en H y por lo tanto F^* está bien definido.

Definición 4.4 Sea el frame $\{\varphi_n\}$, para el cual tenemos asociado el operador sub-frame F y F^* su operador adjunto, definimos el *operador frame* $S : H \rightarrow H$ a partir del operador sub-frame F , de la siguiente manera

$$Sf = (F^*F)f.$$

Proposición 4.2 *El operador frame es lineal, acotado, positivo e invertible.*

Demostración. Consideremos el frame $\{\varphi_n\}$, al cual tenemos asociado el operador sub-frame F y F^* su operador adjunto, entonces $S = (F^*F)$ es **lineal**, ya que para $f, g \in H$ tenemos

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g) &= F^*F(\alpha f + \beta g) \\ &= F^* \left\{ \alpha \langle f, \varphi_n \rangle_H + \beta \langle g, \varphi_n \rangle_H \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \langle f, \varphi_n \rangle_H + \beta \langle g, \varphi_n \rangle_H \right) \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \langle f, \varphi_n \rangle_H \varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta \langle g, \varphi_n \rangle_H \varphi_n \\ &= \alpha F^*Ff + \beta F^*Fg \\ &= \alpha Sf + \beta Sg. \end{aligned}$$

S es **acotado** y **positivo** ya que, para cualquier $f \in H$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle_H \right|^2 = \|Ff\|_{\ell^2}^2 = \langle Ff, Ff \rangle_{\ell^2} = \langle F^*Ff, f \rangle_H = \langle Sf, f \rangle_H.$$

Por ende podemos escribir (4.1), para $0 < A \leq B$, como

$$\langle AIf, f \rangle_H \leq \langle Sf, f \rangle_H \leq \langle BIf, f \rangle_H,$$

lo que implica

$$AI \leq S \leq BI. \quad (4.3)$$

Así tenemos que S es acotado y además es positivo ya que $A > 0$.

S es **invertible**. En efecto de (4.3) tenemos

$$I \leq \frac{1}{A}S \leq \frac{B}{A}I,$$

luego

$$I - \frac{B}{A}I \leq \frac{1}{A}S - \frac{B}{A}I \leq 0,$$

entonces tenemos

$$\left\| \frac{1}{A}S - \frac{B}{A}I \right\| \leq \left\| I - \frac{B}{A}I \right\|,$$

factorizando $\frac{B}{A}$ obtenemos

$$\frac{B}{A} \left\| \frac{1}{B}S - I \right\| \leq \frac{B}{A} \left\| \frac{A}{B}I - I \right\|,$$

es decir

$$\left\| \frac{1}{B}S - I \right\| \leq \left\| \frac{A}{B}I - I \right\|. \quad (4.4)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A}{B}I - I \right\| &= \left\| \left(\frac{A}{B} - 1 \right) I \right\| \\ &= \left| \frac{A}{B} - 1 \right| \|I\|, \end{aligned}$$

y como $0 < A \leq B$ entonces se cumple $-1 < \frac{A}{B} - 1 \leq 0$, luego en la igualdad anterior tenemos

$$\left\| \frac{A}{B}I - I \right\|_H < 1 \cdot \|I\| = 1. \quad (4.5)$$

Luego reemplazando (4.5) en (4.4) tenemos

$$\left\| \frac{1}{B}S - I \right\| < 1.$$

Entonces por el Teorema 2.4 existe $(\frac{1}{A}S)^{-1}$ y esto implica la existencia de S^{-1} . ■

Teorema 4.1 *Sea $\{\varphi_n\}$ un frame, en el espacio de Hilbert H , con fronteras A y B , y sea S su operador frame asociado. Definimos como $\tilde{\varphi}_n = S^{-1}\varphi_n$, entonces $\{\tilde{\varphi}_n\}$ es un frame, en el espacio de Hilbert H , con fronteras $1/A$ y $1/B$.*

La sucesión $\{\tilde{\varphi}_n\}$ es llamada *frame dual* de $\{\varphi_n\}$.

Demostración. Notemos que S^{-1} es autoadjunto pues

$$(S^{-1})^* = ((F^*F)^{-1})^* = ((F^*F)^*)^{-1} = (F^*F^{**})^{-1} = (F^*F)^{-1} = S^{-1}.$$

Entonces tenemos

$$\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H = \langle f, S^{-1}\varphi_n \rangle_H = \langle S^{-1}f, \varphi_n \rangle_H = \langle (F^*F)^{-1}f, \varphi_n \rangle_H,$$

además tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \right|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle S^{-1}f, \varphi_n \rangle_H \right|^2 \\ &= \|F(S^{-1}f)\|_{\ell^2}^2 \\ &= \langle F(S^{-1}f), F(S^{-1}f) \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle S^{-1}f, F^*F(S^{-1}f) \rangle_H \\ &= \langle S^{-1}f, f \rangle_H. \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \right|^2 = \langle S^{-1}f, f \rangle_H. \quad (4.6)$$

De la relación (4.3) tenemos

$$AIS^{-1} \leq SS^{-1} \leq BIS^{-1},$$

es decir

$$AIS^{-1} \leq I \leq BIS^{-1}.$$

Tomando por separado cada desigualdad anterior, tenemos

$$AIS^{-1} \leq I \quad \text{o equivalentemente} \quad S^{-1} \leq \frac{1}{A}I,$$

así mismo tenemos

$$I \leq BIS^{-1} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{1}{B}I \leq S^{-1},$$

de las dos relaciones anteriores tenemos

$$\frac{1}{B}I \leq S^{-1} \leq \frac{1}{A}I.$$

Es decir se cumple

$$\left\langle \frac{1}{B}If, f \right\rangle_H \leq \langle S^{-1}f, f \rangle_H \leq \left\langle \frac{1}{A}If, f \right\rangle_H,$$

luego

$$\frac{1}{B} \langle f, f \rangle_H \leq \langle S^{-1}f, f \rangle_H \leq \frac{1}{A} \langle f, f \rangle_H,$$

reemplazando (4.6) en la ecuación anterior tenemos

$$\frac{1}{B} \|f\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \right|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|_H^2 \quad \text{para todo } f \in H.$$

Lo cual prueba que $\{\tilde{\varphi}_n\}$ es un frame con fronteras $\frac{1}{A}$ y $\frac{1}{B}$. ■

Observación 4.2 Para el frame $\{\tilde{\varphi}_n\}$ denotamos su operador sub-frame asociado como $\tilde{F} : H \rightarrow \ell^2$ definido por

$$\tilde{F}(f) = \{\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle\}.$$

Lema 4.1 Sea F el operador sub-frame asociado al frame $\{\varphi_n\}$ y \tilde{F} el operador sub-frame asociado a su frame dual $\{\tilde{\varphi}_n\}$, entonces se cumple

$$\tilde{F}^* F = I = F^* \tilde{F}. \quad (4.7)$$

Demostración. Primero veamos la forma de \tilde{F}

$$\begin{aligned} \tilde{F}f &= \left\{ \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \right\} \\ &= \left\{ \langle f, S^{-1}\varphi_n \rangle_H \right\} \\ &= \left\{ \langle S^{-1}f, \varphi_n \rangle_H \right\} \\ &= FS^{-1}f \\ &= F(F^*F)^{-1}f. \end{aligned}$$

Es decir $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$, entonces se cumple

$$\tilde{F}^* F = (F(F^*F)^{-1})^* F = \left([(F^*F)^{-1}]^* F^* \right) F = (F^*F)^{-1} F^* F = I.$$

Y también tenemos que

$$F^* \tilde{F} = F^* (F(F^*F)^{-1}) = F^* F (F^*F)^{-1} = I.$$

Lo cual prueba (4.7). ■

Teorema 4.2 Sea $\{\varphi_n\}$ un frame en el espacio de Hilbert H y $\{\tilde{\varphi}_n\}$ su frame dual, entonces para cualquier $f \in H$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_H \tilde{\varphi}_n = f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \varphi_n. \quad (4.8)$$

El lado izquierdo de (4.8) es la fórmula de *reconstrucción* de f en función de los coeficientes del frame, mientras que el lado derecho de (4.8) permite expresar f como *combinación lineal* de las funciones del frame.

Demostración. Sea F el operador frame asociado a $\{\varphi_n\}$ y \tilde{F} el operador frame asociado a su frame dual $\{\tilde{\varphi}_n\}$, entonces por el Lema 4.1 tenemos que para cualquier $f \in H$ se cumple

$$\begin{aligned} f &= (\tilde{F}^* F)f = \tilde{F}^*(F(f)) \\ &= \tilde{F}^* \left(\left\{ \langle f, \varphi_n \rangle_H \right\} \right), \end{aligned}$$

y de (4.2), definición de F^* , tenemos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_H \tilde{\varphi}_n.$$

Análogamente del Lema 4.1 y de (4.2), tenemos

$$\begin{aligned} f &= (F^* \tilde{F})f = F^* \left(\left\{ \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \right\} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \varphi_n. \end{aligned}$$

Lo cual prueba la relación (4.8). ■

Observación 4.3 Si el frame $\{\varphi_n\}$ es estrecho, tenemos que $A = B$, así para cada $f \in H$, se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle_H \right|^2 = B \|f\|_H^2,$$

del Teorema 4.1 se tiene para cada $f \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \right|^2 = \frac{1}{A} \|f\|_H^2,$$

donde

$$\tilde{\varphi}_n = S^{-1} \varphi_n \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{A} I.$$

Esto es

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{A} \varphi_n,$$

por consiguiente la relación (4.8) toma la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle_H \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{1}{A} \varphi_n \right\rangle_H \varphi_n = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_H \varphi_n.$$

Además si el frame es ortonormal ($A = B = 1$), entonces tenemos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_H \varphi_n.$$

Así podemos responder de manera afirmativa las preguntas que hicimos al inicio del capítulo. Ya que si $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es un frame, podemos utilizar (4.8) para obtener la caracterización y reconstrucción de f .

4.3 Frame como base de Riesz

Definición 4.5 Una sucesión de vectores $\{\varphi_n\}$ en el espacio de Hilbert H es llamada *base de Riesz* si satisface las siguientes condiciones

- i. Existen constantes $0 < A \leq B$, tal que para cada $\alpha \in \ell^2$ se cumple

$$A\|\alpha\|_{\ell^2} \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \varphi_n \right\|_H \leq B\|\alpha\|_{\ell^2}.$$

- ii. H es la expansión de $\{\varphi_n\}$, esto es $H = \overline{\text{Gen}} \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Una sucesión $\{\varphi_n\}$ en H satisfaciendo la condición (i) anterior es llamada *sucesión de Riesz*.

Proposición 4.3 Si $\{\varphi_n\}$ es una base de Riesz de H entonces es un frame en H .

Demostración. Sea $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$ una base de Riesz de H , entonces existen constantes A y B , con $0 < A \leq B$, para las cuales se cumple

$$A^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n \right\|_H^2 \leq B^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \text{ para todo } \alpha = \{\alpha_n\} \in \ell^2,$$

para toda sucesión α no nula, esta desigualdad implica que el operador $T : \ell^2 \rightarrow H$ definido por

$$T(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{4.9}$$

está bien definido para cada $\alpha \in \ell^2$, tiene norma $\|T\| < B$, es invertible y por la Observación 2.3 se cumple $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{A}$.

Sea $T^* : H \rightarrow \ell^2$ el operador adjunto de T , definido para cada $f \in H$ por

$$\langle \alpha, T^* f \rangle_{\ell^2} = \langle T\alpha, f \rangle. \tag{4.10}$$

Luego reemplazando (4.9) en (4.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, T^* f \rangle_{\ell^2} &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, f \right\rangle_H \\
\langle \alpha, T^* f \rangle_{\ell^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle e_k, f \rangle_H \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\langle f, e_k \rangle_H} \\
&= \left\langle \alpha, \left\{ \langle f, e_k \rangle_H \right\} \right\rangle_{\ell^2}.
\end{aligned}$$

Esto muestra que el operador adjunto T^* del operador (4.9) está definido por

$$T^*(f) = \left\{ \langle f, e_k \rangle_H \right\}.$$

En vista de la Proposición 2.4 y el Teorema 2.9, tenemos

$$\|T^*\| = \|T\| \leq B$$

y

$$\|(T^*)^{-1}\| = \|(T^{-1})^*\| = \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{A},$$

de la Observación 2.3 tenemos: $1 \leq \|T\| \|T^{-1}\|$, entonces $A \leq \|T\| = \|T^*\|$, así obtenemos

$$A \leq \|T^*\| \leq B.$$

Lo que implica que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle f, e_k \rangle_H \right|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Es decir E es un frame. ■

Observación 4.4 Dado que una base de Riesz es un caso particular de frame cabe recalcar lo siguiente:

- i. Si $\{\varphi_n\}$ es un frame en H no necesariamente será una base de Riesz en H .
- ii. Notemos que si $\{\varphi_n\}$ es un frame en H y además es una base de H , entonces $\{\varphi_n\}$ es una base de Riesz.

4.4 Frame de Ondículas

En las secciones anteriores de este capítulo consideramos un espacio de Hilbert general al cual llamamos H , para esta sección consideraremos el siguiente caso particular $H = L^2(\mathbb{R})$.

Recordemos que al discretizar la TCO, mediante $a = a_0^{-j}$ y $b = kb_0 a_0^{-j}$, obtuvimos

$$\psi_{j,k}(x) = a_0^{j/2} \psi(a_0^j x - kb_0) \text{ con } j, k \in \mathbb{Z},$$

Para la cual planteamos dos interrogantes al inicio del capítulo, las cuales se respondieron de forma afirmativa al final de la Sección 4.2 esto fue siempre y cuando la familia de funciones $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ constituya un frame.

Entonces surge una nueva interrogante

¿cuándo se cumple que la familia de funciones $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es un frame?

Para esto tenemos una condición suficiente sobre ψ , la cual enunciaremos a continuación.

Teorema 4.3 *Si ψ y a_0 son tales que*

$$\underline{Z}_\psi = \text{InfEss} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a_0^j w) \right|^2, 1 \leq |w| \leq a_0 \right\} > 0$$

$$\overline{Z}_\psi = \text{SupEss} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a_0^j w) \right|^2, 1 \leq |w| \leq a_0 \right\} < \infty,$$

y si

$$\beta(s) = \text{SuppEss} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\psi}(a_0^j w) \overline{\widehat{\psi}(a_0^j w + s)}, w \in \mathbb{R} \right\},$$

decae por lo menos tan rápido como

$$\frac{1}{(1 + |s|)^{1+\varepsilon}} \text{ con } \varepsilon > 0.$$

Entonces existe $\bar{b}_0 > 0$ tal que la familia $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es un frame para cualquier elección $b_0 < \bar{b}_0$.

Para $b_0 < \bar{b}_0$, las siguientes expresiones son las fronteras del frame $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \left(\underline{Z}_\psi - \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_0} k\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$B = \frac{2\pi}{b_0} \left(\overline{Z}_\psi - \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_0} k\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right).$$

Demostración. Ver Daubechies [8] y Shi & Chen [5]. ■

Las condiciones en β , \underline{Z}_ψ y \overline{Z}_ψ son satisfechas si, por ejemplo

$$\left| \widehat{\psi}(w) \right| \leq C \frac{|w|^\alpha}{(1 + |w|)^\gamma},$$

con $\alpha > 0$, $\gamma > \alpha + 1$ y C una constante positiva.

Teorema 4.4 (Daubechies) *Si la familia de funciones*

$$\psi_{j,k}(x) = a_0^{j/2} \psi(a_0^j x - kb_0) \quad \text{con } j, k \in \mathbb{Z}$$

constituye un frame en $L^2(\mathbb{R})$ con fronteras A y B . Entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} i. \quad & \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B. \\ ii. \quad & \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B. \end{aligned}$$

Demostración. Ver Daubechies [8]. ■

Este teorema da una restricción a priori sobre ψ , ya que las condiciones I y II están directamente relacionadas con la condición de admisibilidad (3.1).

Corolario 4.1 Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una ondícula si la familia de funciones $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

con $j, k \in \mathbb{Z}$ arbitrarios, es una base de Riesz en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Notemos que $\psi_{j,k}$ es un caso particular de la familia de funciones (3.19) cuando $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$, por la Proposición 4.3 tenemos que toda base Riesz es un caso particular de frame, entonces podemos utilizar el Teorema 4.4, entonces reemplazando los valores de a_0 y b_0 tenemos las relaciones

$$\frac{\ln 2}{2\pi} A \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \leq \frac{\ln 2}{2\pi} B \quad \text{y} \quad \frac{\ln 2}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \leq \frac{\ln 2}{2\pi} B,$$

lo que implica

$$\frac{\ln 2}{\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw + \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \leq \frac{\ln 2}{\pi} B,$$

luego

$$2A \ln 2 \leq \underbrace{2\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw}_{c_\psi} \leq 2B \ln 2.$$

En vista de la demostración de la Proposición 3.1 y la Observación 3.1 se debe cumplir que $|\widehat{\psi}(0)| = 0$ esto es $\widehat{\psi}(0) = 0$, y esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0.$$

Es decir ψ es una ondícula. ■

Capítulo 5

Análisis Multiresolución

5.1 Análisis Multiresolución (AMR)

El concepto de análisis multiresolución es conocido como el corazón de la teoría de ondículas, ya que tiene una relación bastante estrecha con el concepto de frame de ondículas.

Definición 5.1 Un *análisis multiresolución* es una sucesión $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ tal que

- i. $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.
- ii. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
- iii. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- iv. $f \in V_j$ si y sólo si la función $x \mapsto f(2^{-j}x)$ pertenece a V_0 .
- v. $f \in V_0$ si y sólo si la función $x \mapsto f(x - m)$ pertenece a V_0 para todo $m \in \mathbb{Z}$.
- vi. Existe una función $\phi \in V_0$, la cual es llamada *función escala*, tal que el sistema $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 .

Observación 5.1 Las condiciones (i), (ii) y (iii) de la Definición 5.1 significan que cada función en $L^2(\mathbb{R})$ puede ser aproximada por elementos de los subespacios V_j y cuando $j \rightarrow \infty$, la precisión de la aproximación aumenta.

Observación 5.2 Las condiciones (iv) y (v) de la Definición 5.1 expresan la invarianza del sistema de subespacios V_j con respecto al Operador Traslación (2.1) y al Operador Dilatación (2.3), estas condiciones pueden ser expresadas en términos de dichos operadores de la siguiente manera

- iv'. $D_{-j}(V_j) = V_0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.
- v'. $V_0 = \mathcal{T}_m(V_0)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Como $2^{j/2}D_j$ y \mathcal{T}_m son isometrías reescribimos la condición (vi), como

vi'. Existe una función $\phi \in V_0$ llamada función escala tal que, para cada $j \in \mathbb{Z}$ el sistema

$$\{\phi_{j,m}\}_{m \in \mathbb{Z}} = \left\{ 2^{j/2} \phi(2^j x - m) \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

es una base ortonormal en V_j .

Esto último es consecuencia de la Proposición 2.5, ya que aplicamos D_j a la condición (vi') anterior para obtener

$$V_j = D_j(V_0), \quad (5.1)$$

y como $\{\phi_{0,m}\}_{m \in \mathbb{Z}} = \{\phi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en V_0 , entonces aplicamos la dilatación isométrica $2^{j/2} D_j$ a $\{\phi_{0,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ para obtener una base ortonormal de V_j .

5.2 Construcción de un AMR a Partir de una Función Escala

De la Definición 5.1, y en vista de la Observación 5.2 notamos que la función escala determina completamente el análisis multiresolución, ya que $\{\phi_{j,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j , entonces tenemos

$$V_j = \text{Gen} \left\{ 2^{j/2} \phi(2^j x - m) \right\}_{m \in \mathbb{Z}},$$

es decir, los espacios V_j son contruidos a partir de traslaciones y dilataciones de la función escala ϕ . Antes de empezar a construir un AMR a partir de una función escala ϕ primero veamos algunos conceptos de la geometría de espacios de Hilbert.

Proposición 5.1 *Sea una función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y dos constantes $0 < A \leq B$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i. *Para cada sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ tenemos*

$$A \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_n \phi(x - n) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq B \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}.$$

ii. *Para casi todo $w \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$A^2 \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 \leq B^2.$$

Demostración. Ver Wojtaszczyk [9]. ■

Corolario 5.1 *El sistema $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal si y sólo si*

$$\sum |\hat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 = 1 \quad \text{c.t.p.} \quad w \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Al ser un sistema ortonormal, las constantes A y B de la Proposición 5.1, son $A = B = 1$, entonces por la equivalencia en dicha proposición, tenemos

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_n \phi(x - n) \right|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}$$

para todas las sucesiones $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$. Esto es el sistema $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal, la reciproca es el proceso inverso. ■

Proposición 5.2 Si $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz en el espacio de Hilbert H , es decir existen $A, B \in \mathbb{R}^+$ tales que

Para cada sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ se tiene

$$A \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \phi(x - n) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq B \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2},$$

entonces

i. cualquier función $g \in \text{Gen}\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ puede ser escrita como

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \phi(t - m),$$

y esta serie converge en $L^2(\mathbb{R})$.

ii. $g \in \text{Gen}\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ si y sólo si

$$\widehat{g}(w) = \varphi(w) \widehat{\phi}(w),$$

para alguna función φ 2π -periódica con $\int_0^{2\pi} |\varphi(w)|^2 dw < \infty$.

iii. si $g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \phi(t - m)$ y φ es dado como en la condición (ii), entonces

$$\varphi(w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e^{-imw}.$$

iv. las normas de g y φ se relacionan como sigue

$$\frac{1}{B} \|g\|_H \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(w)|^2 dw \right)^{1/2} \leq \frac{1}{A} \|g\|_H,$$

donde A y B son las constantes del enunciado de la Proposición 5.2.

Demostración. Ver Wojtaszczyk[9]. ■

Proposición 5.3 Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función tal que $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz. Entonces existe una función

$$\phi_1 \in \text{Gen}\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

tal que $\{\phi_1(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal del espacio $\text{Gen}\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$.

Demostración. Para probar la existencia de la función ϕ_1 utilizamos la Proposición 5.2, para ello definamos la Transformada de Fourier de ϕ_1 como

$$\widehat{\phi_1}(w) = h(w)\widehat{\phi}(w), \quad (5.2)$$

con h una función 2π -periódica tal que

$$|h(w)| = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 \right)^{-1/2}. \quad (5.3)$$

En vista de la Proposición 5.1 tenemos para $0 < A \leq B$

$$\frac{1}{B} \leq |h(w)| \leq \frac{1}{A}, \quad (5.4)$$

integrando la relación (5.4) tenemos

$$\int_0^{2\pi} |h(w)|^2 dw \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{A^2} dw = \frac{2\pi}{A^2} < \infty.$$

Así concluimos con los requerimientos necesarios para utilizar Proposición 5.2ii, la cual nos dice

$$\phi_1 \in \text{Gen}\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}.$$

Ahora veamos la ortonormalidad del sistema $\{\phi_1(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, para ello utilizamos el Corolario 5.1 y la ecuación (5.2), así tenemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi_1}(w + 2l\pi)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |h(w + 2l\pi)|^2 |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2,$$

como h es 2π -periódica tenemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi_1}(w + 2l\pi)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |h(w)|^2 |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 = |h(w)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2.$$

Es decir

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi_1}(w + 2l\pi)|^2 = |h(w)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2. \quad (5.5)$$

Reemplazando (5.3) en (5.5) tenemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi_1}(w + 2l\pi)|^2 = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 \right)^{-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 \right) = 1,$$

Así por el Corolario 5.1 concluimos que el sistema $\{\phi_1(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal.

Ahora definamos los conjuntos A y B , como

$$A = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) ; \widehat{g} = f(w)\widehat{\phi}(w) \text{ con } f \text{ } 2\text{-}\pi \text{ periódica tal que } \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 dw < \infty \right\}.$$

$$B = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) ; \widehat{g} = f(w)\widehat{\phi_1}(w) \text{ con } f \text{ } 2\text{-}\pi \text{ periódica tal que } \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 dw < \infty \right\}.$$

Notemos que $A = B$. En efecto, sea $g \in B$, entonces tenemos

$$\widehat{g} = f(w)\widehat{\phi_1}(w) \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 dw < \infty, \quad (5.6)$$

reemplazando (5.2) en la igualdad de (5.6) tenemos

$$\widehat{g} = f(w)h(w)\widehat{\phi}(w),$$

como la función $x \mapsto f(x)h(x)$ es la multiplicación de dos funciones 2π -periódicas, entonces también es 2π -periódica y además satisface

$$\int_0^{2\pi} |f(x)h(x)|^2 dx < \infty.$$

En efecto

$$\int_0^{2\pi} |f(w)h(w)|^2 dw = \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 |h(w)|^2 dw,$$

reemplazando (5.4) en la igualdad anterior, y por (5.6) tenemos

$$\int_0^{2\pi} |f(w)h(w)|^2 dw \leq \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 \frac{1}{A^2} dw = \frac{1}{A^2} \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 dw < \infty.$$

Es decir $g \in A$ y esto prueba $B \subset A$, la inclusión $A \subset B$ es el proceso inverso al anterior, por lo tanto concluimos que $A = B$. Entonces como consecuencia de la Proposición 5.2ii tenemos

$$\text{Gen}\{\phi_1(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}} = \text{Gen}\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}.$$

Así podemos decir que $\{\phi_1(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal del espacio

$$\text{Gen}\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}.$$

Lo cual termina nuestra demostración. \blacksquare

Proposición 5.4 Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función tal que $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$. Sean los espacios

$$V_j = \text{Gen}\left\{2^{j/2}\phi(2^j x - m)\right\}_{m \in \mathbb{R}}$$

y P_j la proyección ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ sobre V_j , entonces para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0$$

y en particular

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

Demostración. Como el espacio de las funciones continuas con soporte compacto, $C_0(\mathbb{R})$, es denso en $L^2(\mathbb{R})$ es suficiente mostrar que para cualquier función $g \in C_0(\mathbb{R})$, con $\text{Supp}(g) \subseteq [-R, R]$, para algún $R > 0$ se cumple

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j g\|_2 = 0. \quad (5.7)$$

En efecto, ya que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ existe una sucesión $\{f_n\} \subset C_0(\mathbb{R})$ para la cual dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_2 < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0,$$

para el mismo $\varepsilon > 0$, por el Teorema 2.10 se cumple

$$\|P_j f_n - P_j f\|_2 \leq \|P_j\| \|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Es decir

$$\left| \|P_j f_n\|_2 - \|P_j f\|_2 \right| \leq \|P_j f_n - P_j f\|_2 < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0,$$

tomando el límite cuando $j \rightarrow -\infty$ tenemos

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \left| \|P_j f_n\|_2 - \|P_j f\|_2 \right| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0,$$

entonces por la continuidad del valor absoluto tenemos

$$\left| \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f_n\|_2 - \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2 \right| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0,$$

utilizando la relación (5.7), tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2 < \varepsilon.$$

Es decir

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2 = 0.$$

Y esto es lo que se quería probar, empecemos con la demostración, para ello, sea $g \in C_0(\mathbb{R})$, con $\text{Supp}(g) \subseteq [-R, R]$, de la Observación 5.2 tenemos que para cada $j \in \mathbb{Z}$ el sistema

$$\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{R}},$$

es una base ortonormal de

$$V_j = \text{Gen} \left\{ 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

por lo tanto es un caso particular de base de Riesz y luego de frame en V_j , entonces existen $0 < A \leq B$ tales que

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \right|_2^2 \leq B\|f\|_2^2 \text{ para cada } f \in V_j.$$

Ahora acotaremos $\|P_j g\|_2^2$, para ello reemplazamos $f = P_j g$ en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, entonces

$$\begin{aligned} \|P_j g\|_2^2 &\leq \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle_2 \right|^2 \\ &= \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle g, \phi_{j,s} \rangle_2 \phi_{j,s}, \phi_{j,k} \right\rangle_2 \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left| \langle g, \phi_{j,s} \rangle_2 \right|^2 \left| \langle \phi_{j,s}, \phi_{j,k} \rangle_2 \right|^2, \end{aligned}$$

como $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j , entonces se cumple

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,s} \rangle_2 = \delta_{s,k}$$

luego

$$\begin{aligned} \|P_j g\|_2^2 &\leq \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left| \langle g, \phi_{j,k} \rangle_2 \right|^2 |\delta_{s,k}|^2 \\ &= \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \langle g, \phi_{j,k} \rangle_2 \right|^2 \\ &= \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-R}^R g(s) \overline{\phi_{j,k}(s)} ds \right|^2, \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned} \|P_j g\|_2^2 &\leq \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-R}^R |g(s)|^2 ds \int_{-R}^R |\phi_{j,k}(s)|^2 ds \\ &= \frac{\|g\|_2^2}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-R}^R |\phi_{j,k}(s)|^2 ds \\ &= \frac{\|g\|_2^2}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-R}^R \left| 2^{j/2} \phi(2^j s - k) \right|^2 ds, \end{aligned}$$

luego hacemos un cambio de variable, $u = 2^j s - k$, entonces

$$\|P_j g\|_2^2 \leq \frac{\|g\|_2^2}{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-2^j R - k}^{2^j R - k} |\phi(u)| du.$$

Dado que existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para cada $j < j_0$ se tiene $2^j R < \frac{1}{2}$, para estos j las integrales anteriores son tomadas sobre los conjuntos disjuntos, entonces

$$\|P_j g\|_2^2 \leq \frac{\|g\|_2^2}{A} \int_{U_j} |\phi(u)|^2 du$$

donde

$$U_j = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-2^j R - k, 2^j R - k],$$

como

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u)|^2 du < \infty$$

entonces del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, podemos decir

$$\int_{U_j} |\phi(u)|^2 du \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow -\infty.$$

Esto significa que

$$\|P_j g\|_2 \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow -\infty.$$

En particular si $g \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ tenemos $P_j g = g$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, entonces $g = 0$. ■

Proposición 5.5 Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función tal que

- i. $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{R}}$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$.
- ii. $\widehat{\phi}(w)$ es continua en 0 y $\widehat{\phi}(0) \neq 0$.

Entonces $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ donde $V_j = \text{Gen} \{2^{j/2} \phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con $j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Tomemos la función $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $f \perp \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, y sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ con $\text{Supp}(g) \subseteq [-R, R]$ para algún $R > 0$ satisfaciendo

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Entonces podemos definir \widehat{g} como

$$\widehat{g} = \widehat{f} \cdot \chi_{[-R, R]},$$

esto es posible gracias al Teorema de Plancherel. En efecto

$$\|\widehat{f} \cdot \chi_{[-R, R]} - \widehat{g}\|_2 = \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{L^2([-R, R])} = \|f - g\|_{L^2([-R, R])} \leq \|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Como en la prueba de la proposición anterior P_j denota la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ en V_j , y como f es ortogonal a todos los espacios V_j claramente podemos decir que $P_j f = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|P_j g|_2 < \varepsilon \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}. \quad (5.8)$$

Recordemos que, si $\{\phi_{j,k}\}$ es una base ortonormal de V_j entonces es un frame en V_j , entonces existen $0 < A \leq B$ tales que

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle_2|^2 \leq B\|f\|_2^2 \text{ para cada } f \in V_j.$$

Tomando $f = P_j g$ en el lado derecho de la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \|P_j g\|_2^2 &\geq \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle_2|^2 \\ &= \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle g, \phi_{j,s} \rangle_2 \phi_{j,s}, \phi_{j,k} \right\rangle_2 \right|^2 \\ &= \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle g, \phi_{j,s} \rangle_2 \langle \phi_{j,s}, \phi_{j,k} \rangle_2 \right|^2, \end{aligned}$$

como $\{\phi_{j,k}\}$ es una base ortonormal entonces $\langle \phi_{j,s}, \phi_{j,k} \rangle_2 = \delta_{s,k}$, así tenemos

$$\begin{aligned} \|P_j g\|_2^2 &\geq \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \phi_{j,k} \rangle_2|^2 \\ &= \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(w) \overline{\widehat{\phi}_{j,k}}(w) dw \right|^2 \\ &= \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(w) 2^{-j/2} e^{ik2^j w} \overline{\widehat{\phi}(2^{-j} w)} dw \right|^2. \end{aligned}$$

Es decir

$$\|P_j g\|_2^2 \geq \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(w) 2^{-j/2} e^{ik2^j w} \overline{\widehat{\phi}(2^{-j} w)} dw \right|^2. \quad (5.9)$$

Asumamos que j es tal que $2^j \pi > R$, entonces las integrales anteriores pueden ser escritas como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(w) 2^{-j/2} e^{ik2^j w} \overline{\widehat{\phi}(2^{-j} w)} dw = \int_{-2^j \pi}^{2^j \pi} \widehat{g}(w) 2^{-j/2} e^{ik2^j w} \overline{\widehat{\phi}(2^{-j} w)} dw.$$

La integral del lado derecho de la igualdad anterior se puede interpretar como el $(-k)$ -ésimo coeficiente de Fourier de la función $w \mapsto \sqrt{2\pi} \widehat{g}(w) \overline{\widehat{\phi}(2^{-j} w)}$ en el intervalo $[-2^j \pi, 2^j \pi]$ con respecto al sistema

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{-j/2} e^{ik2^{-j} w} \right\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

el cual es un sistema ortonormal completo en $L^2([-2^j\pi, 2^j\pi])$, entonces en vista del Teorema 2.16iii tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{2\pi}\widehat{g}(\cdot)\widehat{\phi}(2^{-j}\cdot)\right\|_2^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle\sqrt{2\pi}\widehat{g}(\cdot)\widehat{\phi}(2^{-j}\cdot),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2^{-j/2}e^{ik2^{-j}\cdot}\right\rangle_2\right|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(w)\widehat{\phi}(2^{-j}w)2^{-j/2}e^{ik2^jw}dw\right|^2.\end{aligned}$$

Es decir

$$\int_{-2^j\pi}^{2^j\pi}\left|\sqrt{2\pi}\widehat{g}(w)\widehat{\phi}(2^{-j}w)\right|^2dw = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(w)2^{-j/2}e^{ik2^jw}\widehat{\phi}(2^{-j}w)dw\right|^2.$$

Reemplazando la igualdad anterior en (5.9) tenemos

$$\|P_jg\|_2^2 \geq \frac{2\pi}{B}\int_{-2^j\pi}^{2^j\pi}\left|\widehat{g}(w)\widehat{\phi}(2^{-j}w)\right|^2dw = \frac{2\pi}{B}\int_{-R}^R\left|\widehat{g}(w)\widehat{\phi}(2^{-j}w)\right|^2dw.$$

Luego

$$\|P_jg\|_2^2 \geq \frac{2\pi}{B}\int_{-R}^R\left|\widehat{g}(w)\widehat{\phi}(2^{-j}w)\right|^2dw. \quad (5.10)$$

Como ϕ es continua en cero, vemos que $\widehat{\phi}(2^{-j}w)$ tiende uniformemente en $[-R, R]$ a $\widehat{\phi}(0)$ cuando $j \rightarrow \infty$, entonces de (5.8) y (5.10) tenemos que

$$\frac{2\pi}{B}|\widehat{\phi}(0)|^2\|g\|_2^2 < \varepsilon^2,$$

como ε es arbitrario y $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ tenemos que $\|g\|_2 = 0$ lo que implica que $f = 0$, entonces concluimos que $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. ■

Ahora mostraremos cómo construir un AMR a partir de una función escala ϕ , para lo cual utilizaremos las proposiciones anteriores.

Teorema 5.1 *Sea ϕ en $L^2(\mathbb{R})$ tal que*

a. $\{\phi(t-m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$.

b. Para $\{\alpha_k\} \in \ell^2$ se cumple que

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\phi(x-k)$$

es convergente en $L^2(\mathbb{R})$.

c. $\widehat{\phi}(w)$ es continua en 0 y $\widehat{\phi}(0) \neq 0$.

Entonces la sucesión de espacios $V_j = \text{Gen}\left\{2^{j/2}\phi(2^jx-k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con $j \in \mathbb{Z}$ es un AMR.

Demostración. Probemos que la sucesión de espacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ cumple cada una de las condiciones que debe satisfacer un AMR, tal como indica la Definición 5.1. Empezaremos probando la condición (iv) de la Definición 5.1, para lo cual tenemos

$$V_j = \text{Gen} \left\{ 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Para $j = 0$ se tiene $V_0 = \text{Gen}\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ entonces si $f \in V_0$ se cumple que

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(x - k),$$

por lo tanto

$$f(2^j x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(2^j x - k) \in V_j$$

Análogamente si $f \in V_j$ tenemos que $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$, entonces

$$f(2^{-j} x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k 2^{j/2} \phi(2^j 2^{-j} x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k 2^{j/2} \phi(x - k) \in V_0.$$

Ahora probemos la condición (i) de la Definición 5.1. Si $f \in V_0$ entonces la función $x \mapsto f(2^j x)$ pertenece a V_j , entonces

$$f(2^j x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(2^j x - k), \quad (5.11)$$

por la condición (b) del Teorema 5.1 tenemos que

$$\phi(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \beta_s \phi(2x - s)$$

es convergente en $L^2(\mathbb{R})$, entonces reemplazando la igualdad anterior en (5.11) tenemos

$$f(2^j x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \sum_{s \in \mathbb{Z}} \beta_s \phi(2(2^j x - k) - s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_k \beta_s \phi(2^{j+1} x - (2k + s)),$$

por ende tenemos que la función $x \mapsto f(2^j x)$ pertenece a V_{j+1} , así tenemos que $V_j \subset V_{j+1}$ con $j \in \mathbb{Z}$.

La condición (iii) de la Definición 5.1 es consecuencia de la Proposición 5.4.

Y por la Proposición 5.5 tenemos

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$$

con lo cual la condición (ii) de la Definición 5.1 es satisfecha.

Para probar la condición (vi) de la Definición 5.1 podemos usar Proposición 5.3, o también se comprueba por simple inspección ya que

$$V_0 = \text{Gen} \{ \phi(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Entonces, tenemos que $\{ \phi(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 por lo tanto ϕ vendría a ser la función escala asociada al AMR que estamos construyendo.

Por último probemos la condición (v) de la Definición 5.1. Para lo cual, sea $f \in V_0$ entonces

$$f(x - m) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s \phi(x - m - s) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s \phi(x - (m + s)),$$

luego haciendo el cambio de variable $k = m + s$, tenemos

$$f(x - m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-m} \phi(x - k) \in V_0.$$

Análogamente tenemos que si la función $x \mapsto f(x - m)$ pertenece a V_0 para todo m entonces tomando $m = 0$ tenemos $f \in V_0$. Esto prueba la condición (v) de la Definición 5.1. Esto es hemos construido un AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ para el cual ϕ es su función escala asociada. ■

5.3 Construcción de Ondículas a Partir de un AMR

El objetivo de la sección anterior fue construir un AMR a partir de una función escala, ahora pasaremos a la construcción de ondículas a partir de un AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ dado.

De la definición del AMR tenemos que $V_0 \subset V_1$, entonces sea W_0 el complemento ortogonal de V_0 en V_1 , esto es

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

De la Observación 5.2, tenemos que $D_j(V_1) = V_{j+1}$, entonces

$$V_{j+1} = D_j(V_0 \oplus W_0),$$

como $V_j \subset V_{j+1}$, sea W_j el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} entonces

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\ &= D_j(V_0) \oplus W_j. \end{aligned}$$

Así concluimos que $D_j(W_0)$ es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Esto es

$$W_j = D_j(W_0). \tag{5.12}$$

Notece que

$$V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j, \text{ con } W_j = D_j(W_0) \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},$$

como $V_j \rightarrow \{0\}$ cuando $j \rightarrow -\infty$ entonces descomponiendo cada V_j tenemos

$$V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j = \cdots \bigoplus W_{j-2} \bigoplus W_{j-1} \bigoplus W_j = \bigoplus_{l=-\infty}^j W_l \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},$$

como $V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ cuando $j \rightarrow \infty$ entonces tenemos

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} W_l.$$

Es decir

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

Para encontrar una ondícula ortonormal, todo lo que tenemos que hacer es encontrar una función $\psi \in W_0$ tal que $\{\psi(x - k)\}$ es una base ortonormal de W_0 , ya que si este es el caso entonces como $2^{j/2} D_j$ es una isometría y de (5.12) tenemos que para todo $j \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

es una base ortonormal para W_j , entonces

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}} = \left\{ 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ luego por el Corolario 4.1 tenemos que ψ es una ondícula.

Antes de continuar con la construcción de la ondícula ortonormal primero caracterizaremos la Transformada de Fourier de la función escala. Sea $\phi \in V_0$ la función escala asociada al AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ entonces tenemos

$$\phi \in V_0 \subset V_1.$$

Luego

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k),$$

tomando la Transformada de Fourier a la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(w) &= \mathcal{F} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k) \right\} (w) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \mathcal{F} \{ \phi(2x - k) \} (w) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} \phi(2x - k) dx, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = 2x - k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(w) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\frac{u+k}{2})w} \phi(u) \frac{du}{2} \\
&= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \frac{e^{-i(\frac{w}{2})k}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\frac{w}{2})u} \phi(u) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\frac{w}{2}k} \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right).
\end{aligned}$$

Es decir

$$\widehat{\phi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\frac{w}{2}k} \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right). \quad (5.13)$$

Entonces definimos el *filtro low-pass* asociado a la función escala ϕ como

$$m_{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ixk}. \quad (5.14)$$

Notemos que la función m_{ϕ} es 2π -periódica y además

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_{\phi}(w)|^2 dw \right)^{1/2} = 1.$$

En efecto, de la Observación 5.2 tenemos que $\left\{ 2^{-1/2} \phi\left(2^{-1}x - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_1 , entonces se cumple

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\|_2 = 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $k = 0$, tenemos

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{2}\right) \right\|_2^2 = 2, \quad (5.15)$$

como $\phi \in V_1$ entonces de la Definición 5.1iv la función $x \mapsto \phi\left(\frac{x}{2}\right)$ pertenece a V_0 , luego podemos escribir dicha función de la siguiente manera

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(x - k),$$

Tomando $\|\cdot\|_2$, a la función anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \phi\left(\frac{x}{2}\right) \right\|_2^2 &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(x - k), \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(x - n) \right\rangle_2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} \langle \phi(x - k), \phi(x - n) \rangle_2,
\end{aligned}$$

como $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 , tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \phi\left(\frac{x}{2}\right) \right\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} \delta_{k,n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2. \end{aligned}$$

Es decir

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{2}\right) \right\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2. \quad (5.16)$$

Luego

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_\phi(w)|^2 dw \right)^{1/2} &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-iwk} \right|^2 dw \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-iwk} \right|^2 dw \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

por el Teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_\phi(w)|^2 dw \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 dw \right)^{1/2},$$

luego de (5.16) y (5.15)

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_\phi(w)|^2 dw \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{2} dw \right)^{1/2} = 1.$$

Volviendo a la caracterización de la Transformada de Fourier de ϕ , reemplazando (5.14) en (5.13) obtenemos

$$\widehat{\phi}(w) = m_\phi\left(\frac{w}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right).$$

O equivalentemente

$$\widehat{\phi}(2w) = m_\phi(w) \widehat{\phi}(w). \quad (5.17)$$

Continuando con la construcción de ondículas ortonormales asociadas a la función escala ϕ , consideremos la siguiente propiedad del filtro low-pass.

Lema 5.1 *Sea m_ϕ el filtro low-pass asociado a la función escala ϕ , definido en (5.14), entonces*

$$|m_\phi(w)|^2 + |m_\phi(w + \pi)|^2 = 1 \text{ c.t.p. } w \in \mathbb{R}.$$

Demostración. por el Corolario 5.1 tenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(2w + 2l\pi)|^2 = 1 \text{ c.t.p. } w \in \mathbb{R},$$

aplicando (5.17) en la igualdad anterior obtenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(2w + 2l\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + k\pi)|^2 |m_\phi(w + k\pi)|^2 = 1 \text{ c.t.p. } w \in \mathbb{R},$$

descomponiendo en sumas pares e impares

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 |m_\phi(w + 2l\pi)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + \pi + 2l\pi)|^2 |m_\phi(w + \pi + 2l\pi)|^2 = 1,$$

como m_ϕ es una función 2π -periódica, tenemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 |m_\phi(w)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + \pi + 2l\pi)|^2 |m_\phi(w + \pi)|^2 = 1,$$

luego

$$|m_\phi(w)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + 2l\pi)|^2 + |m_\phi(w + \pi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w + \pi + 2l\pi)|^2 = 1,$$

ahora usamos nuevamente el Corolario 5.1, obteniendo

$$|m_\phi(w)|^2 \cdot 1 + |m_\phi(w + \pi)|^2 \cdot 1 = 1 \text{ c.t.p. } w \in \mathbb{R}.$$

Esto es lo que queríamos demostrar. ■

Nuestra construcción de la ondícula ψ será dada en términos de la Transformada de Fourier, empezaremos con una descripción de los espacios V_0 y V_1 en términos de la Transformada de Fourier.

Sea $g \in V_0$, como $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 , por la Proposición 5.2 tenemos que

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(x - k),$$

también tenemos que

$$g \in V_0 \text{ si y sólo si } \widehat{g}(w) = \varphi(w) \widehat{\phi}(w),$$

para alguna función φ 2π -periódica tal que $\int_0^{2\pi} |\varphi(w)|^2 dw < \infty$, y además

$$\|g\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(w)|^2 dw \right)^{1/2}, \quad (5.18)$$

donde

$$\varphi(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ikw}.$$

Así tenemos la siguiente caracterización de V_0

$$V_0 = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) ; \widehat{g}(w) = \varphi(w) \widehat{\phi}(w), \begin{array}{l} \text{para alguna función } 2\pi\text{-periódica} \\ \varphi \text{ que satisface (5.18)} \end{array} \right\} \quad (5.19)$$

De la Definición 5.1iv

$f \in V_1$ si y sólo si la función $x \mapsto f(2^{-1}x)$ pertenece a V_0 ,

como $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 , entonces podemos escribir la función anterior como

$$f(2^{-1}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(x-k), \quad (5.20)$$

tomando la Transformada de Fourier, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(2^{-1}x)\}(w) &= \mathcal{F}\left\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(x-k)\right\}(w) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \mathcal{F}\{\phi(x-k)\}(w) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ikw} \hat{\phi}(w), \end{aligned}$$

dado que $\mathcal{F}\{f(2^{-1}x)\}(w) = 2\hat{f}(2w)$, la igualdad anterior queda como

$$2\hat{f}(2w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ikw} \hat{\phi}(w).$$

Luego

$$\hat{f}(2w) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ikw} \hat{\phi}(w) \quad (5.21)$$

Entonces definimos como

$$m_f(w) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ikw}. \quad (5.22)$$

Notemos que m_f es 2π -periódica, además $\int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw < \infty$. En efecto

$$\int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw \leq \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 dw$$

Ya que se cumple (5.20) podemos usar las relaciones (5.13), (5.15) y (5.16), entonces

$$\int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw \leq \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 2 dw = \pi < \infty.$$

Como la función $x \mapsto f(2^{-1}x)$ pertenece a V_0 entonces de (5.19), se cumple

$$\mathcal{F}\{f(2^{-1}x)\}(w) = \varphi(w) \hat{\phi}(w),$$

donde $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ikw}$, con

$$\|f(2^{-1}x)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(w)|^2 dw \right)^{1/2}.$$

Y esto implica que

$$\|f(2^{-1}x)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{2}{2} \varphi(w) \right|^2 dw \right)^{1/2} = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} \varphi(w) \right|^2 dw \right)^{1/2},$$

reemplazando (5.22) en la igualdad anterior, tenemos

$$\|f(2^{-1}x)\|_2 = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw \right)^{1/2},$$

luego

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw \right)^{1/2} &= \frac{1}{2} \|f(2^{-1}x)\|_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|2^{-1/2} f(2^{-1}\cdot)\|_2, \end{aligned}$$

y como $2^{-1/2}D_{-1}$ es una isometría, tenemos

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_2. \quad (5.23)$$

Reemplazando (5.22) en (5.21)

$$\widehat{f}(2w) = m_f(w) \widehat{\phi}(w),$$

o equivalentemente

$$\widehat{f}(w) = m_f\left(\frac{w}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right).$$

Así tenemos la caracterización de V_1 .

$$V_1 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \widehat{f}(w) = m_f\left(\frac{w}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right), \text{ para alguna función } 2\pi\text{-periódica } m_f \text{ que satisface (5.23)} \right\} \quad (5.24)$$

Ahora también describiremos al subespacio W_0 ($V_1 = V_0 \oplus W_0$), en términos de la Transformada de Fourier.

Proposición 5.6 *Una función f pertenece a W_0 si y sólo si*

$$\widehat{f}(w) = e^{iw/2} v(w) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right),$$

donde m_ϕ es definida como en (5.14) y v es una función 2π -periódica tal que

$$\int_0^{2\pi} |v(w)|^2 dw < \infty,$$

y además

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v(w)|^2 dw \right)^{1/2}.$$

Demostración. Es claro que $f \in W_0$ si y sólo si $f \in V_1$ y $f \perp V_0$, como $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 tenemos

$$f \perp V_0 \text{ si y sólo si } \langle f, \phi(x-k) \rangle_2 = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (5.25)$$

Notemos que por el Teorema de Plancherel se cumple

$$\begin{aligned} \langle f, \phi(x-k) \rangle_2 &= \left\langle \widehat{f}, \mathcal{F}\{\phi(x-k)\} \right\rangle_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \overline{\mathcal{F}\{\phi(x-k)\}(w)} dw, \end{aligned}$$

desarrollando la Transformada de Fourier anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \langle f, \phi(x-k) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{-ikw} \overline{\widehat{\phi}(w)} dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{ikw} \widehat{\phi}(w) dw. \end{aligned}$$

Consideramos la siguiente partición $\mathbb{R} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} [2l\pi, 2(l+1)\pi]$ entonces la integral anterior puede ser escrita como

$$\langle f, \phi(x-k) \rangle_2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} e^{iku} \widehat{f}(u) \overline{\widehat{\phi}(u)} du,$$

hacemos el cambio de variable $u = w + 2l\pi$, entonces

$$\langle f, \phi(x-k) \rangle_2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{ik(w+2l\pi)} \widehat{f}(w+2l\pi) \overline{\widehat{\phi}(w+2l\pi)} dw,$$

Luego, como la función $x \mapsto e^{ikx}$ es 2π -periódica, tenemos

$$\langle f, \phi(x-k) \rangle_2 = \int_0^{2\pi} e^{ikw} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(w+2l\pi) \overline{\widehat{\phi}(w+2l\pi)} dw. \quad (5.26)$$

Notemos que

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(w+2l\pi) \overline{\widehat{\phi}(w+2l\pi)} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f}(w+2l\pi) \right| \left| \overline{\widehat{\phi}(w+2l\pi)} \right|,$$

luego

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(w + 2l\pi) \overline{\widehat{\phi}(w + 2l\pi)} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)| |\widehat{\phi}(w)| dw \leq \|f\|_2 \|\phi\|_2.$$

Entonces la serie $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(w + 2l\pi) \widehat{\phi}(w + 2l\pi)$ representa una función Lebesgue-integrable en $[0, 2\pi]$, a la cual llamaremos F . Es decir

$$F(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(x + 2l\pi) \widehat{\phi}(x + 2l\pi). \quad (5.27)$$

Entonces podemos escribir (5.26) como un producto interno en $L^2([0, 2\pi])$

$$\begin{aligned} \langle f, \phi(x - k) \rangle_2 &= \int_0^{2\pi} e^{ikw} F(w) dw \\ &= \left\langle F(w), e^{-ikw} \right\rangle_{L^2([0, 2\pi])}. \end{aligned}$$

Luego reescribimos (5.25), como

$$f \in W_0 \text{ si y sólo si } f \in V_1 \text{ y } \left\langle F(w), e^{-ikw} \right\rangle_{L^2([0, 2\pi])} = 0 \text{ c.t.p. } w \in \mathbb{R}. \quad (5.28)$$

Tomando la Transformada de Fourier a (5.27) en $[0, 2\pi]$, tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{F}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ixw} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ixw} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(x + 2l\pi) \widehat{\phi}(x + 2l\pi) dx, \end{aligned}$$

luego

$$\sqrt{2\pi} \widehat{F}(w) = \int_0^{2\pi} e^{-ixw} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(x + 2l\pi) \widehat{\phi}(x + 2l\pi) dx.$$

Evaluando $\sqrt{2\pi} \widehat{F}$ en $w = -k$ y de (5.28), tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \widehat{F}(-k) &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(x + 2l\pi) \widehat{\phi}(x + 2l\pi) dx \\ &= \left\langle F(w), e^{-ikw} \right\rangle_{L^2([0, 2\pi])} = 0. \end{aligned}$$

Como $\{e^{-ikw}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz para $L^2([0, 2\pi])$, entonces

$$F(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(x + 2l\pi) \widehat{\phi}(x + 2l\pi) = 0 \text{ c.t.p. } x \in \mathbb{R}. \quad (5.29)$$

Como $f \in V_1$ de (5.24) tenemos

$$\widehat{f}(w) = m_f\left(\frac{w}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right),$$

y además de (5.17) tenemos

$$\widehat{\phi}(w) = m_\phi\left(\frac{w}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right),$$

entonces de (5.29) tenemos que para casi todo $w \in \mathbb{R}$ se cumple

$$0 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(w + 2l\pi) \widehat{\phi}(w + 2l\pi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f\left(\frac{w}{2} + l\pi\right) \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + l\pi\right) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + l\pi\right) \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + l\pi\right)},$$

o equivalentemente, para casi todo $w \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f(w + l\pi) \widehat{\phi}(w + l\pi) \overline{m_\phi(w + l\pi) \widehat{\phi}(w + l\pi)} = 0.$$

Ordenando los términos de la sumatoria anterior tenemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f(w + l\pi) \overline{m_\phi(w + l\pi)} \left| \widehat{\phi}(w + l\pi) \right|^2 = 0,$$

descomponiendo en sumas pares e impares obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f(w + 2k\pi) \overline{m_\phi(w + 2k\pi)} \left| \widehat{\phi}(w + 2k\pi) \right|^2 + \\ & \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f(w + \pi + 2k\pi) \overline{m_\phi(w + \pi + 2k\pi)} \left| \widehat{\phi}(w + \pi + 2k\pi) \right|^2 = 0, \end{aligned}$$

como m_f y m_ϕ son funciones 2π -periódicas, entonces la igualdad anterior queda como

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f(w) \overline{m_\phi(w)} \left| \widehat{\phi}(w + 2k\pi) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f(w + \pi) \overline{m_\phi(w + \pi)} \left| \widehat{\phi}(w + \pi + 2k\pi) \right|^2 = 0,$$

luego

$$m_f(w) \overline{m_\phi(w)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(w + 2k\pi) \right|^2 + m_f(w + \pi) \overline{m_\phi(w + \pi)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(w + \pi + 2k\pi) \right|^2 = 0,$$

como $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 , podemos usar el Corolario 5.1 en la igualdad anterior, obteniendo

$$m_f(w) \overline{m_\phi(w)} \cdot 1 + m_f(w + \pi) \overline{m_\phi(w + \pi)} \cdot 1 = 0.$$

Así también reescribimos (5.28) como $f \in W_0$ si y sólo si

$$f \in V_1 \text{ y } m_f(w) \overline{m_\phi(w)} + m_f(w + \pi) \overline{m_\phi(w + \pi)} = 0 \text{ c.t.p. } w \in \mathbb{R}. \quad (5.30)$$

Si consideramos los vectores $u, v \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, definidos como

$$u = (m_f(w), m_f(w + \pi)) \quad \text{y} \quad v = (\overline{m_\phi(w)}, \overline{m_\phi(w + \pi)}),$$

de (5.30) vemos que $u \cdot v = 0$, es decir u y v son ortogonales para casi todo $w \in \mathbb{R}$, además por el Lema 5.1 tenemos que $(\overline{m_\phi(w)}, \overline{m_\phi(w + \pi)})$ no es cero, entonces se cumple

$$(m_f(w), m_f(w + \pi)) = \alpha(w)(\overline{m_\phi(w + \pi)}, -\overline{m_\phi(w)}). \quad (5.31)$$

Como m_f y m_ϕ son funciones 2π -periódicas entonces α también tiene que ser una función 2π -periódica. Tomando $w = \eta + \pi$ en (5.31) tenemos

$$(m_f(\eta + \pi), m_f(\eta + 2\pi)) = \alpha(\eta + \pi)(\overline{m_\phi(\eta + 2\pi)}, -\overline{m_\phi(\eta + \pi)}),$$

luego

$$(m_f(\eta + \pi), m_f(\eta)) = \alpha(\eta + \pi)(\overline{m_\phi(\eta)}, -\overline{m_\phi(\eta + \pi)}). \quad (5.32)$$

De las relaciones (5.31) y (5.32) tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} m_f(\eta) &= \alpha(\eta)\overline{m_\phi(\eta + \pi)}. \\ m_f(\eta) &= -\alpha(\eta + \pi)\overline{m_\phi(w + \pi)}. \end{aligned}$$

Luego concluimos que $\alpha(\eta) = -\alpha(\eta + \pi)$, así reescribimos (5.30) obteniendo la siguiente caracterización de W_0

$$W_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \hat{f}(w) = \alpha\left(\frac{w}{2}\right) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \right\}, \quad (5.33)$$

donde α es una función 2π -periódica tal que $\alpha(w) = -\alpha(w + \pi)$, lo que es equivalente a decir $\alpha(w) = h(w)e^{iw}$, con h π -periódica.

Si definimos la función v como $v(w) = h\left(\frac{w}{2}\right)$, tenemos que v es 2π -periódica. Luego de (5.30) tenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \alpha\left(\frac{w}{2}\right) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= e^{iw/2} h\left(\frac{w}{2}\right) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= e^{-iw/2} v(w) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right). \end{aligned}$$

Esto es

$$\hat{f}(w) = e^{-iw/2} v(w) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right). \quad (5.34)$$

Como $f \in V_1$, se cumple

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v(2w) m_\phi(w + \pi)|^2 dw \right)^{1/2},$$

descomponiendo la integral tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |v(2w)m_\phi(w+\pi)|^2 dw + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} |v(2w)m_\phi(w+\pi)|^2 dw \right)^{1/2},$$

luego hacemos el cambio de variable $u = w - \pi$, para la segunda integral obteniendo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |v(2w)m_\phi(w+\pi)|^2 dw + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |v(2u+2\pi)m_\phi(u+2\pi)|^2 du \right)^{1/2},$$

como v y m_ϕ son funciones 2π -periódicas tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |v(2w)m_\phi(w+\pi)|^2 dw + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |v(2u)m_\phi(u)|^2 du \right)^{1/2}.$$

Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |v(2w)| \left(|m_\phi(w+\pi)|^2 + |m_\phi(w)|^2 \right) dw \right)^{1/2},$$

usando el Lema 5.1 tenemos

$$\|f\|_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |v(2w)| \cdot 1 dw \right)^{1/2},$$

luego del cambio de variable $u = 2w$ concluimos que

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v(u)| du \right)^{1/2}. \quad (5.35)$$

Así podemos reescribir (5.33) utilizando (5.34), esto es

$$W_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \widehat{f}(w) = e^{-iw/2} v(w) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right), \text{ para alguna función } 2\pi\text{-periódica } v \text{ que satisface (5.35)} \right\} \quad (5.36)$$

Lo cual termina esta demostración. \blacksquare

Así tenemos la caracterización de W_0 , pero necesitamos identificar aquellas funciones $\psi \in W_0$ tal que $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_0 lo cual realizaremos con ayuda del Corolario 5.1.

Lema 5.2 Sea $f \in W_0$ y \widehat{f} , entonces el sistema $\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_0 si y sólo si $|v| = 1$ en casi todo $w \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para demostrar que el sistema $\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal utilizamos el Corolario 5.1. Como $f \in W_0$ de 5.24 tenemos

$$\widehat{f}(w) = e^{-iw/2} v(w) \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right),$$

luego

$$\widehat{f}(w + 2k\pi) = e^{i(w+2k\pi)/2} v(w + 2k\pi) \overline{m_\phi\left(\frac{w + 2k\pi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{w + 2k\pi}{2}\right).$$

De la igualdad anterior concluimos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(w + 2k\pi) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(w + 2k\pi)|^2 \left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi + k\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + k\pi\right) \right|^2,$$

y como v es 2π -periódica, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(w + 2k\pi) \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(w)|^2 \left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi + k\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + k\pi\right) \right|^2 \\ &= |v(w)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi + k\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + k\pi\right) \right|^2, \end{aligned}$$

ahora dividimos la sumatoria anterior en sumas pares e impares

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(w + 2k\pi) \right|^2 &= |v(w)|^2 \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi + 2l\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2l\pi\right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi + 2l\pi + \pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2l\pi + \pi\right) \right|^2 \right], \end{aligned}$$

luego usamos el hecho que m_ϕ es 2π -periódico, obteniendo

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(w + 2k\pi) \right|^2 &= |v(w)|^2 \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2l\pi\right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_\phi\left(\frac{w}{2}\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2l\pi + \pi\right) \right|^2 \right] \\ &= |v(w)|^2 \left[\left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2l\pi\right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| m_\phi\left(\frac{w}{2}\right) \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2l\pi + \pi\right) \right|^2 \right], \end{aligned}$$

como $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 , podemos aplicar el Corolario 5.1 a la igualdad anterior, obteniendo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(w + 2k\pi) \right|^2 = |v(w)|^2 \left[\left| m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \right|^2 \cdot 1 + \left| m_\phi\left(\frac{w}{2}\right) \right|^2 \cdot 1 \right],$$

y por Lema 5.1 tenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(w + 2k\pi) \right|^2 = |v(w)|^2 \cdot 1.$$

En vista del Corolario 5.1 podemos concluir que $\{f(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal si

y sólo si $|v| = 1$ c.t.p. $w \in \mathbb{R}$.

Pero aun necesitamos mostrar que para cada $f \in W_0$ con $v=1$ en c.t.p $w \in \mathbb{R}$ el sistema $\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en W_0 .

Observemos que $\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz, ya que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k f(t-k) \right\|_2^2 &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k f(t-k), \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_l f(t-l) \right\rangle_2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_l} \langle f(t-k), f(t-l) \rangle_2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_l} \delta_{k,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Entonces podemos aplicar la Proposición 5.2ii, es decir

$$g \in \text{Gen}\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ si y sólo si } \widehat{g}(w) = \varphi(w) \widehat{f}(w), \quad (5.37)$$

de (5.36), caracterización de W_0 , y de (5.37) tenemos

$$g \in \text{Gen}\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ si y sólo si } \widehat{g}(w) = \varphi(w) v(w) e^{iw/2} \overline{m_\phi \left(\frac{w}{2} + \pi \right)} \widehat{\phi} \left(\frac{w}{2} \right),$$

si denotamos como $h(w) = \varphi(w) v(w)$, vemos que h es una función 2π -periódica entonces podemos concluir que

$$g \in \text{Gen}\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ si y sólo si } g \in W_0.$$

Esto es

$$W_0 = \text{Gen}\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Lo cual termina la demostración. \blacksquare

Ahora podemos resumir toda esta construcción de ψ en el siguiente teorema

Teorema 5.2 Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR con $\phi \in V_0$ su función escala asociada, la función $\psi \in W_0$ ($V_1 = V_0 \oplus W_0$) es una ondícula si y sólo si

$$\widehat{\psi}(w) = e^{iw/2} v(w) m_\phi \left(\frac{w}{2} + \pi \right),$$

para alguna función 2π -periódica v tal que $|v(w)| = 1$ c.t.p. $w \in \mathbb{R}$, Además cada ondícula tiene la propiedad que

$$W_j = \text{Gen}\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \text{Gen}\left\{2^{j/2} \psi \left(2^j x - k \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Demostración. Procedimiento seguido a lo largo de esta sección. \blacksquare

Las ondículas que obtenemos usando este teorema dependen de la elección del AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Además es claro que diferentes funciones v dan diferentes ondículas, así si queremos construir una ondícula usando este teorema necesitamos fijar la función v .

Corolario 5.2 *Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR con $\phi \in V_0$ su función escala asociada, entonces*

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \overline{h_k} \phi(2x + k - 1)$$

es una ondícula.

Demostración. Antes de empezar la demostración notemos que

$$-e^{-iw} = -\cos(w) + i \sin(w)$$

es una función 2π -periódica y tiene modulo igual a 1, entonces podemos tomar $v(w) = -e^{-iw}$ y utilizar el Teorema 5.2 obteniendo

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(w) &= -e^{iw/2} e^{-iw} \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= -e^{-iw/2} \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right), \end{aligned}$$

reemplazando el filtro low-pass (5.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(w) &= -e^{-iw/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{ik\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= -e^{-iw/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{ikw/2} e^{ik\pi} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= -e^{-iw/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{ikw/2} [\cos(k\pi) + i \sin(k\pi)] \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= -e^{-iw/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{ikw/2} (-1)^k \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{i(k-1)w/2} (-1)^{k+1} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \overline{h_k} \mathcal{F}\{\phi(2x + k - 1)\}(w). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \overline{h_k} \phi(2x + k - 1)$$

es una ondícula. ■

5.4 Ejemplos

Ejemplo 5.1 (AMR de Haar) Consideremos la sucesión de espacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, donde $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ es el subespacio de las funciones constantes en intervalos de la forma

$$I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)] \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

y consideremos la función $\phi = \chi_{[0,1]}$, es decir

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Veamos que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ satisface las condiciones de la definición de AMR con ϕ su función escala asociada.

En efecto

Condición (i): Si $r < s$, entonces tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$[2^{-s}k_1, 2^{-s}(k_1+1)] \subset [2^{-r}k, 2^{-r}(k+1)].$$

Esto se debe a que $f(j) = 2^{-j}$ es decreciente para todo j , es decir cualquier intervalo $I_{r,k}$ se puede construir como la unión de intervalos $I_{s,k}$. En particular tomamos $r = j$ y $s = j+1$ para concluir $V_j \subset V_{j+1}$.

Condición (ii): Notemos que

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \subset L^2(\mathbb{R}),$$

donde V_j es el espacio de funciones constantes en los intervalos $I_{j,k}$, esto es un espacio de funciones simples, recordemos que $f \in L^2(\mathbb{R})$ si

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx \mid \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f \right\} < \infty.$$

Entonces podemos decir que $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Condición (iii): Para probar que $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ basta probar que

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} [2^{-j}k_1, 2^{-j}(k_1+1)] = \{0\},$$

ya que V_j es el espacio de funciones constantes en el intervalo $I_{j,k}$. En efecto como $V_j \supset V_{j-1}$ entonces del hecho

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [2^{-j}k_1, 2^{-j}(k_1+1)] = \{0\}$$

tenemos que $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} [2^{-j}k_1, 2^{-j}(k_1 + 1)) = \{0\}$

Condición (iv): Sea $f \in V_j$ entonces $f(x) = c_k$ (constante) cuando $x \in [2^{-j}k, 2^{-j}(k + 1))$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ así evaluando f en $2^{-j}x$ tenemos $f(2^{-j}x) = c_k$ cuando $x \in [k, k + 1)$ es decir la función $x \mapsto f(2^{-j}x)$ pertenece a V_0 .

Condición (v): Sea $f \in V_0$ entonces $f(x) = c_k$ cuando $x \in [k, k + 1)$ así para todo $m \in \mathbb{Z}$ tenemos que $f(x) = c_{k-m}$ cuando $x \in [(k-m), (k-m) + 1)$ es decir la función $x \mapsto f(x-m)$ pertenece a V_0 .

Condición (vi): Nótese que si $f \in V_0$ entonces f es una función constante en los intervalos $I_{0,k}$ por lo tanto se cumple

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \chi_{[k, k+1)},$$

es decir $\{\chi_{[k, k+1)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base de V_0 más bien dicho una base ortonormal de V_0 ya que $\|\chi_{[k, k+1)}\|_2 = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ debido a que

$$\langle \chi_{[k, k+1)}, \chi_{[l, l+1)} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Entonces en vista de la Definición 5.1 tenemos que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, definido anteriormente, es un AMR.

Ejemplo 5.2 (Construcción del AMR de Haar) Probemos que $\phi = \chi_{[0,1)}$ satisface las condiciones del Teorema 5.1. Para ello denotaremos como

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))}.$$

Así tenemos que $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz ya que para cualquier $\{\alpha_k\} \in \ell^2$ se cumple

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi_{j,k} \right\|_2^2 &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi_{j,k}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_l \phi_{j,l} \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_l} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \overline{\alpha_k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 = \|\alpha\|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

Lo cual prueba la condición (a) del Teorema 5.1.

Notemos que

$$\chi_{[0,1)}\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x}{2} \in [0, 1) \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Entonces $\chi_{[0,1)}\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ si $x \in [0, 2)$, así tenemos

$$\chi_{[0,1)}\left(\frac{x}{2}\right) = \chi_{[0,1)}(x) + \chi_{[1,2)}(x).$$

Lo cual prueba la condición (b) del Teorema 5.1.

Tomando la Transformada de Fourier a ϕ tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixw} \chi_{[0,1)}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ixw} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-ixw}}{-iw} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-iw}}{iw} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iw/2}}{w/2} \left(\frac{e^{iw/2} - e^{-iw/2}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iw/2} \frac{\text{sen}(w/2)}{w/2}. \end{aligned}$$

Así concluimos que $\widehat{\phi}$ es continua en cero y $\widehat{\phi}(0) \neq 0$. Lo cual prueba la condición (c) del Teorema 5.1.

Entonces por el Teorema 5.1 la sucesión de espacios $V_j = \text{Gen}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definidos antes, forman un AMR.

Ejemplo 5.3 (Construcción de la ondícula de Haar) Consideremos el AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ del Ejemplo 5.1 para el cual, $\phi = \chi_{[0,1)}$ es su función escala asociada, entonces se cumple

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1,k}(x),$$

o equivalentemente

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(2x - k). \quad (5.38)$$

Notemos que

$$\phi(2x - k) = \chi_{[0,1)}(2x - k) = \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})}(x).$$

Entonces (5.38) queda como

$$\chi_{[0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\chi_{[\frac{1}{2},1)}(x),$$

es decir

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Entonces por el Corolario 5.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \overline{h_k} \phi(2x + k - 1) \\ &= \sqrt{2} (-\overline{h_0} \phi(2x - 1) + \overline{h_1} \phi(2x)) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{[\frac{1}{2},1)}(x) \right) \\ &= \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(x). \end{aligned}$$

Es una ondícula, la cual se vio en el Ejemplo 3.1.

Capítulo 6

Descomposición y Reconstrucción Basada en Ondículas

6.1 Filtros Low-Pass y High-Pass

En el capítulo anterior se mostró la obtención del filtro low-pass y se enunció una de sus propiedades más importantes, en el presente capítulo introduciremos el filtro high-pass. Recordemos la definición de filtro low-pass.

Definición 6.1 Para un AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ con función escala asociada ϕ , tenemos que $\phi \in V_0 \subset V_1$ y como $\{\phi_{1k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_1 , entonces existe $\{h_k\} \in \ell^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1k}(x), \text{ con } h_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle_2, \quad (6.1)$$

aplicando la Transformada de Fourier a (6.1), obtenemos

$$\widehat{\phi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i \frac{w}{2} k} \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right).$$

Entonces definimos el *filtro low-pass* asociado a la ondícula padre ϕ como

$$m_\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ixk}, \text{ con } h_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle_2.$$

Definición 6.2 Para un AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ con función escala asociada ϕ , por el Teorema 5.2 podemos construir una ondícula $\psi \in W_0$, y como $V_1 = V_0 \oplus W_0$, entonces $\psi \in V_1$, es decir existe $\{H_k\} \in \ell^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \phi_{1k}(x), \text{ con } H_k = \langle \psi, \phi_{1k} \rangle_2, \quad (6.2)$$

Aplicando la Transformada de Fourier a (6.2) tenemos

$$\widehat{\psi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k e^{-i \frac{w}{2} k} \widehat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right).$$

Entonces definimos el *filtro high-pass* asociado a la ondícula madre como

$$M_\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k e^{-ixk}, \text{ con } H_k = \langle \psi, \phi_{1k} \rangle_2.$$

Las relaciones (6.1) y (6.2) son conocidas como *relaciones two-scale*, ya que relacionan funciones en dos niveles de resolución adyacentes. Así mismo los elementos de la sucesión $\{h_k\}$ son llamados *coeficientes interescala correspondientes al filtro low-pass*, y los elementos de la sucesión $\{H_k\}$ son llamados *coeficientes interescala correspondientes al filtro high-pass*.

Proposición 6.1 *Los filtros low-pass y high-pass son ortogonales y por ende también las sucesiones formadas por los coeficientes interescala correspondientes al filtro low-pas y al filtro high-pas.*

Demostración. Empezaremos mostrando la ortogonalidad de $\{H_k\}$ y $\{h_k\}$, recordemos que $\phi \in V_0$ y $\psi \in W_0$ y como W_0 es el complemento ortogonal de V_0 en V_1 , se cumple $\langle \psi, \phi \rangle_2 = 0$, Además

$$\begin{aligned} \langle \psi, \phi \rangle_2 &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \phi_{1,k}, \sum_{s \in \mathbb{Z}} h_s \phi_{1,s} \right\rangle_2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} H_k \overline{h_s} \langle \phi_{1,k}, \phi_{1,s} \rangle_2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \overline{h_k} \\ &= \langle \{H_k\}, \{h_k\} \rangle_{\ell^2}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\langle \{H_k\}, \{h_k\} \rangle = 0$, esto es, las sucesiones $\{H_k\}$ y $\{h_k\}$ son ortogonales. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} \langle m_\phi, M_\phi \rangle_2 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ixk}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} H_s e^{-ixs} \right\rangle_2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} h_k \overline{H_s} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ixk}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ixs} \right\rangle_2, \end{aligned}$$

como $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ixk} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([-1, 1])$, entonces

$$\begin{aligned} \langle m_\phi, M_\phi \rangle_2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{H_k} \\ &= \langle \{h_k\}, \{H_k\} \rangle_{\ell^2} = 0. \end{aligned}$$

Es decir, los filtros son ortogonales. ■

6.2 Algoritmos Basados en Ondículas

6.2.1 Operadores Aproximación y Detalle

Definición 6.3 Sean ϕ y ψ la ondícula padre y la ondícula madre respectivamente, asociados al AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, entonces para $j, k \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k).$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Sea la función $f \in L^2(\mathbb{R})$ para la cual definimos sus *coeficientes de escala* como

$$c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{j,k}(x)} dx,$$

y sus *coeficientes de ondícula* como la TDO de f en cada $i, j \in \mathbb{Z}$, es decir

$$d_{j,k} = T_{\psi_{j,k}}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx.$$

Definición 6.4 Para cada $j \in \mathbb{Z}$, definimos el *operador aproximación* como la proyección ortonormal en V_j , esto es $P_j : X \subseteq L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ definido como

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k}.$$

Lema 6.1 El operador aproximación cumple con las siguientes propiedades

- i. P_j es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R})$.
- ii. P_j es idempotente, esto es $P_j^2 = P_j$.
- iii. Dado los enteros j, k con $j < k$, y $g \in V_j$ entonces se cumple $P_k g = g$.
- iv. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $j \in \mathbb{Z}$ fijo, entonces $\|P_j f\|_2 \leq \|f\|_2$.

Demostración. Estas pruebas pueden realizarse sin dificultad utilizando la definición del operador aproximación y las propiedades del producto interno.

Probemos la propiedad (I): sea $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} P_j(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \alpha f + \beta g, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k} \\ &= \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k} + \beta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k} \\ &= \alpha P_j f + \beta P_j g. \end{aligned}$$

Probemos la propiedad (II): sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned}
P_j^2 f &= P_j (P_j f) \\
P_j^2 f &= P_j \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k} \right) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \right\rangle_2 \phi_{j,l} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle_2 \phi_{j,l} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,l} \rangle_2 \phi_{j,l} = P_j f.
\end{aligned}$$

Probemos la propiedad (III): sea $j < k$ entonces por la definición del AMR tenemos que $V_j \subset V_k$ y como $g \in V_j$ se cumple que $g \in V_k$, así podemos escribir

$$g = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r \phi_{k,r}.$$

Entonces se cumple

$$\begin{aligned}
P_k g &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle g, \phi_{k,s} \rangle_2 \phi_{k,s} \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r \phi_{k,r}, \phi_{k,s} \right\rangle_2 \phi_{k,s} \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r \langle \phi_{k,r}, \phi_{k,s} \rangle_2 \phi_{k,s} \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r \phi_{k,r} = g.
\end{aligned}$$

Probemos la propiedad (IV): sea $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\|P_j f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |P_j f(t)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k}(t) \right|^2 dt
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j,$$

luego para algún j fijo, se cumple

$$L^2(\mathbb{R}) = V_j \bigoplus \underbrace{W_j \bigoplus W_{j+1} \bigoplus W_{j+2} \cdots}_{V_j^\perp}$$

Sea $\{\delta_k\}$ una base ortonormal de V_j^\perp , entonces

$$\|P_j f\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_2 \phi_{j,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \delta_k \rangle_2 \delta_k \right|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

Así terminamos esta demostración. ■

Lema 6.2 Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces se cumple

$$i. \lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f - f\|_2 = 0.$$

$$ii. \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2 = 0.$$

Demostración. Estos resultados son consecuencia de que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un AMR y de las propiedades del operador aproximación.

Probemos el enunciado (I). Sea $\varepsilon > 0$, de la Definición 5.1ii tenemos que existen $p \in \mathbb{Z}$ y $g \in V_p$ tal que

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3)$$

Sea $j \in \mathbb{Z}$ tal que $j > p$ entonces por el Lema 6.1 tenemos que $P_j g = g$ para todo $j > p$, entonces para $j > p$ se cumple

$$\begin{aligned} \|P_j f - f\|_2 &= \|P_j f - P_j g - f + g\|_2 \\ &\leq \|P_j f - P_j g\|_2 + \|-f + g\|_2 \\ &\leq \|P_j(f - g)\|_2 + \|f - g\|_2 \\ &\leq \|P_j\| \|f - g\|_2 + \|f - g\|_2. \end{aligned}$$

Ahora por el Teorema 2.10iii tenemos para $j > p$

$$\|P_j f - f\|_2 \leq 2 \|f - g\|_2$$

Luego de (6.3) tenemos

$$\|P_j f - f\|_2 \leq \varepsilon.$$

Esto es

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f - f\|_2 = 0.$$

La demostración del enunciado (II) es la misma demostración que la Proposición 5.4, la cual se vio en el capítulo anterior. ■

Definición 6.5 Para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos el *operador detalle* Q_j como la proyección ortonormal en W_j , esto es $Q_j : X \subseteq L^2(\mathbb{R}) \rightarrow W_j$ definido como

$$Q_j f = \sum_{k \in F} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k}.$$

Lema 6.3 *El operador detalle cumple con las siguientes propiedades*

- i. Q_j es lineal.
- ii. Q_j es idempotente.
- iii. Sean $j, k \in \mathbb{Z}$ con $j \neq k$ y $f \in W_j$ entonces $Q_j f = 0$.
- iv. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $j \in \mathbb{Z}$ fijo, entonces $\|Q_j f\|_2 \leq \|f\|_2$.

Demostración. Estas pruebas pueden realizarse sin dificultad utilizando la definición del operador detalle, siguiendo el mismo procedimiento que para el operador aproximación.

Sea $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} Q_j(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \alpha f + \beta g, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k} \\ &= \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k} + \beta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k} \\ &= \alpha Q_j f + \beta Q_j g. \end{aligned}$$

lo cual prueba la propiedad (I). Para probar la condición (II), consideremos $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned} Q_j^2 f &= Q_j(Q_j f) \\ &= Q_j \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k} \right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k}, \psi_{j,l} \right\rangle_2 \psi_{j,l} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \langle \psi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle_2 \psi_{j,l} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,l} \rangle_2 \psi_{j,l} = Q_j f. \end{aligned}$$

Lo cual prueba (II). Ahora, probemos la propiedad (III). Sea $j \neq k$ entonces $W_j \perp W_k$ y como $f \in W_j$ se cumple $f = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r \psi_{j,r}$, luego

$$Q_k f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{k,s} \rangle_2 \psi_{k,s},$$

entonces

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r \psi_{j,r}, \psi_{k,s} \right\rangle_2 \psi_{k,s} \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_s \langle \psi_{j,r}, \psi_{k,s} \rangle_2 \psi_{k,s} = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, probemos la propiedad (IV). Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned}
\|Q_j f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |Q_j f(t)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k}(t) \right|^2 dt
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j,$$

luego para algún j fijo, se cumple

$$L^2(\mathbb{R}) = W_j \bigoplus \underbrace{\cdots W_{j-2} \bigoplus W_{j-1} \bigoplus W_{j+1} \bigoplus W_{j+2} \cdots}_{W_j^\perp}$$

Sea $\{\delta_k\}$ una base ortonormal de W_j^\perp , entonces

$$\|Q_j f\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \delta_k \rangle_2 \delta_k(t) \right|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

Esto termina la demostración. \blacksquare

Observación 6.1 Recordemos que para un AMR se cumple $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, entonces para $f \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos $P_j f \in V_j$ para el cual se cumple

$$P_j f = P_{j-1} f + Q_{j-1} f \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},$$

esto es

$$Q_{j-1} = P_j - P_{j-1} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

6.2.2 Algoritmo de Descomposición por Ondículas

Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR con función escala asociada ϕ , sabemos que $\{\phi_{j,k}\}$ y $\{\psi_{j,k}\}$, generados respectivamente por la ondícula padre ϕ y la ondícula madre ψ , son bases ortonormales de V_j y W_j respectivamente.

Sea $f \in V_0$ la función a descomponer, al ser $\{\phi_{0,k}\}$ una base ortonormal de V_0 tenemos

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{0,k} \phi_{0,k} \quad \text{donde } c_{0,k} = \langle f, \phi_{0,k} \rangle_2. \quad (6.4)$$

Notemos que f pertenece al nivel inicial de la descomposición ($i = 0$), en el siguiente nivel de menor resolución existen dos subespacios mutuamente ortogonales esto es $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$, para los cuales $\{\phi_{-1,k}\}$ y $\{\psi_{-1,k}\}$ son bases ortogonales respectivamente. Entonces existe una única forma de descomponer f como una combinación lineal de funciones en V_{-1} y W_{-1} , es decir

$$f = (P_{-1} + Q_{-1}) f,$$

donde P_{-1} es la proyección ortonormal de f en V_{-1} y Q_{-1} es la proyección ortonormal de f en W_{-1} , entonces tenemos

$$P_{-1}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-1,k} \phi_{-1,k} \quad \text{donde } c_{-1,k} = \langle P_{-1}f, \phi_{-1,k} \rangle_2. \quad (6.5)$$

$$Q_{-1}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{-1,k} \psi_{-1,k} \quad \text{donde } d_{-1,k} = \langle Q_{-1}f, \psi_{-1,k} \rangle_2. \quad (6.6)$$

Notemos que P_{-1} es el operador aproximación en $j = -1$ y Q_{-1} es el operador detalle en $j = -1$, así mismo $c_{-1,k}$, $d_{-1,k}$ son los coeficientes de escala y coeficientes de ondícula respectivamente en $j = -1$.

Además P_{-1} y Q_{-1} son respectivamente el Operador Aproximación y el Operador Detalle en $j = -1$, así mismo $c_{-1,k}$ y $d_{-1,k}$ son respectivamente los coeficientes de escala y los coeficientes de ondícula en $j = -1$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \langle P_{-1}f, \phi_{-1,k} \rangle_2 &= \langle P_{-1}f, \phi_{-1,k} \rangle_2 + 0 \\ &= \langle P_{-1}f, \phi_{-1,k} \rangle_2 + \langle Q_{-1}f, \phi_{-1,k} \rangle_2 \\ &= \langle P_{-1}f + Q_{-1}f, \phi_{-1,k} \rangle_2. \end{aligned}$$

Luego

$$\langle P_{-1}f, \phi_{-1,k} \rangle_2 = \langle f, \phi_{-1,k} \rangle_2. \quad (6.7)$$

Reemplazando (6.7) en (6.5) y de (6.4) tenemos

$$\begin{aligned} c_{-1,k} &= \langle f, \phi_{-1,k} \rangle_2 \\ &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{0,n} \phi_{0,n}, \phi_{-1,k} \right\rangle_2. \end{aligned}$$

Esto es

$$c_{-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{0,n}, \phi_{-1,k} \rangle_2 c_{0,n}, \quad (6.8)$$

donde

$$\begin{aligned}\langle \phi_{0,n}, \phi_{-1,k} \rangle_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,n}(t) \overline{\phi_{-1,k}(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-n) \overline{2^{-1/2} \phi(2^{-1}t - k)} dt,\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = \frac{t}{2} - k$, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \phi_{0,n}, \phi_{-1,k} \rangle_2 &= 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2(u+k) - n) \overline{\phi(u)} 2 du \\ &= 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2u - (n-2k)) \overline{\phi(u)} du,\end{aligned}$$

utilizando la relación two-scale (6.1) obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \phi_{0,n}, \phi_{-1,k} \rangle_2 &= 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2u - (n-2k)) \overline{\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \phi_{1,l}(u)} du \\ &= 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2u - (n-2k)) \overline{\phi(2u-l)} du \\ &= 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \langle \phi(2 \cdot - (n-2k)), \phi(2 \cdot - l) \rangle = 2h_{n-2k}.\end{aligned}$$

Luego

$$\langle \phi_{0,n}, \phi_{-1,k} \rangle_2 = 2h_{n-2k}. \quad (6.9)$$

Reemplazando (6.9) en (6.8) obtenemos

$$c_{-1,k} = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{0,n}.$$

La sucesión $\{c_{-1,k}\}$ contiene los coeficientes del desarrollo de la función f en la base $\{\phi_{-1,k}\}$ de V_{-1} y además representa la aproximación de los datos originales $\{c_{0,k}\}$.

Análogamente obtenemos

$$\begin{aligned}d_{-1,k} &= \langle Q_{-1}f, \psi_{-1,k} \rangle_2 \\ &= \langle f, \psi_{-1,k} \rangle_2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{0,n}, \psi_{-1,k} \rangle_2 c_{0,n},\end{aligned}$$

con

$$\langle \phi_{0,n}, \psi_{-1,k} \rangle_2 = 2H_{n-2k}.$$

Esto es

$$d_{-1,k} = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_{n-2k} c_{0,n}.$$

La sucesión $\{d_{-1,k}\}$ contiene los coeficientes del desarrollo de la función f en la base $\{\psi_{-1,k}\}$ de W_{-1} y además representa la información de detalle de los datos originales $\{c_{0,k}\}$.

La descomposición en espacios de menor resolución se puede continuar tanto como se desee, así generalizando para algún $i = 0, -1, -2, \dots$, tenemos

$$\begin{aligned}
P_i f &= P_{i-1} f + Q_{i-1} f \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle P_i f, \phi_{i-1,k} \rangle_2 \phi_{i-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle P_i f, \psi_{i-1,k} \rangle_2 \psi_{i-1,k} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{i-1,k} \rangle_2 \phi_{i-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{i-1,k} \rangle_2 \psi_{i-1,k} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i-1,k} \phi_{i-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{i-1,k} \psi_{i-1,k}.
\end{aligned}$$

Esto es

$$P_i f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i-1,k} \phi_{i-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{i-1,k} \psi_{i-1,k},$$

con

$$\begin{aligned}
c_{i-1,k} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{i,n}, \phi_{i-1,k} \rangle_2 c_{i,n}, \\
d_{i-1,k} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{i,n}, \psi_{i-1,k} \rangle_2 c_{i,n}.
\end{aligned}$$

Análogamente a (6.9) obtenemos

$$\langle \phi_{i,n}, \phi_{i-1,k} \rangle_2 = 2h_{n-2k}, \quad (6.10)$$

$$\langle \phi_{i,n}, \psi_{i-1,k} \rangle_2 = 2H_{n-2k}, \quad (6.11)$$

luego

$$\begin{aligned}
c_{i-1,k} &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{i,n}, \\
d_{i-1,k} &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_{n-2k} c_{i,n}.
\end{aligned}$$

De esta manera si iteramos hasta un nivel $i = -M$, tendremos la siguiente descomposición de f

$$\begin{aligned}
f &= P_{-M} f + Q_{-M} f + Q_{-M+1} f + \dots + Q_{-1} f \\
&= P_{-M} f + \sum_{i=-M}^{-1} Q_i f = P_{-M} f + \sum_{i=1}^M Q_{-i} f \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-M,k} \phi_{-M,k} + \sum_{i=1}^M \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{-i,k} \psi_{-i,k} \\
&= 2^{-M/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-M,k} \phi(2^{-M}t - k) + \sum_{i=1}^M \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{-i,k} 2^{-i/2} \psi(2^{-i}t - k).
\end{aligned}$$

Luego

$$f = 2^{-M/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-M,k} \phi(2^{-M}t - k) + \sum_{i=1}^M \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{-i,k} 2^{-i/2} \psi(2^{-i}t - k).$$

Este algoritmo también es conocido como *algoritmo piramidal* de descomposición. EL algoritmo de descomposición y reconstrucción por ondículas reciben la denominación de algoritmos piramidales ya que son la versión en ondículas de los algoritmos piramidales desarrollados por Peter Burt y Edwar Adelson.

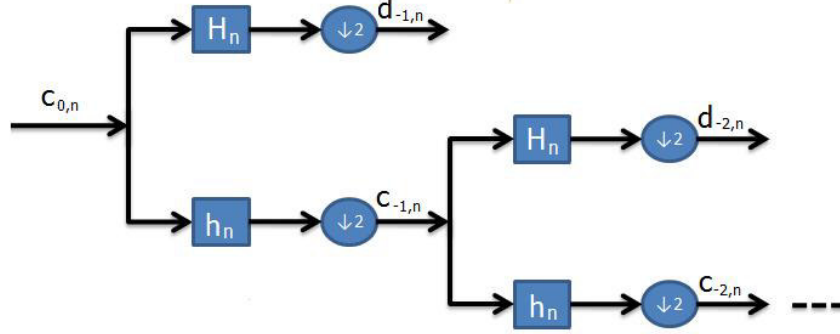


Figura 6.1: Esquema del Algoritmo de Descomposición por Ondículas

Definición 6.6 La serie

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

es llamada *serie de ondículas* de f . Y la expresión

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

Es llamada *representación en ondículas* de f .

6.2.3 Algoritmo de Reconstrucción por Ondículas

De manera inversa a la descomposición, la sucesión de coeficientes de la señal original $\{c_{0,n}\}$ puede ser reconstruida a partir de los coeficientes de ondícula $\{d_{i,n}\}$ y los coeficientes de escala $\{c_{i,n}\}$ con $-M \leq i < 0$, donde $i = -M$ es el nivel de menor resolución, teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en el algoritmo de descomposición por ondículas. La aproximación discreta $\{c_{i+1,n}\}$ en el próximo nivel de mayor resolución puede ser obtenida como

$$\begin{aligned} c_{i+1,n} &= \langle P_{i+1}f, \phi_{i+1,n} \rangle_2 \\ &= \langle P_i f + Q_i f, \phi_{i+1,n} \rangle_2 \\ &= \langle P_i f, \phi_{i+1,n} \rangle_2 + \langle Q_i f, \phi_{i+1,n} \rangle_2, \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i,k} \phi_{i,k}, \phi_{i+1,n} \right\rangle_2 + \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{i,k} \psi_{i,k}, \phi_{i+1,n} \right\rangle_2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
c_{i+1,n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i,k} \langle \phi_{i,k}, \phi_{i+1,n} \rangle_2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{i,k} \langle \psi_{i,k}, \phi_{i+1,n} \rangle_2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i,k} \overline{\langle \phi_{i+1,n}, \phi_{i,k} \rangle_2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{i,k} \overline{\langle \phi_{i+1,n}, \psi_{i,k} \rangle_2},
\end{aligned}$$

reemplazando (6.10) y (6.11), obtenemos la reconstrucción de los coeficientes de escala

$$c_{i+1,n} = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i,k} h_{n-2k} + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{i,k} H_{n-2k}. \quad (6.12)$$

Si definimos los operadores A y B como

$$A(\alpha_k) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \alpha_k.$$

$$B(\alpha_k) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{n-2k} \alpha_k.$$

Entonces podemos reescribir (6.12), como

$$c_{i+1,n} = A c_{i,n} + B d_{i,n}. \quad (6.13)$$

Para reconstruir los datos $\{c_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ empezamos con la aproximación en el nivel de más baja resolución $i = -M$, entonces aplicamos (6.13) a $\{c_{-M,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, así tenemos

$$c_{-M+1,n} = B d_{-M,n} + A c_{-M,n}. \quad (6.14)$$

Notemos que $\{c_{-M+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ corresponde a los datos en el nivel $i = -M+1$, luego aplicamos (6.13) en (6.14) para obtener $\{c_{-M+2,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ que corresponde a los datos en el nivel $i = -M+2$, esto es

$$c_{-M+2,n} = B d_{-M+1,n} + A c_{-M+1,n},$$

reemplazando (6.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
c_{-M+2,n} &= B d_{-M+1,n} + A (B d_{-M,n} + A c_{-M,n}) \\
&= B d_{-M+1,n} + A B d_{-M,n} + A^2 c_{-M,n}.
\end{aligned}$$

De esta manera podemos continuar hasta que los datos originales $\{c_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son reconstruidos, así tenemos la fórmula para la reconstrucción de los datos originales

$$c_{0,n} = B d_{-1,n} + \sum_{i=2}^M A^{i-1} B d_{-i,n} + A^M c_{-M,n}.$$

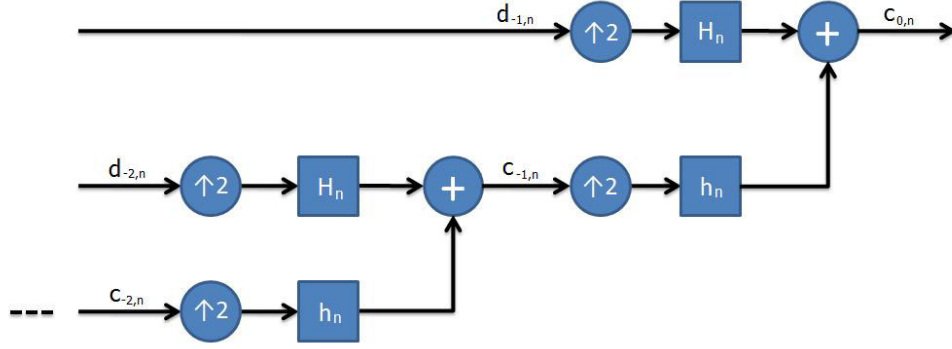


Figura 6.2: Esquema del Algoritmo de Reconstrucción por Ondículas

6.3 Transformada Rápida de Ondícula (TRO)

En el cálculo práctico de la Transformada Discreta de Ondícula, para una ondícula con soporte compacto, se utilizan los coeficientes interescala h_k y H_k correspondientes al filtro low-pass y al filtro high-pass, los cuales tienen un número finito, N , de coeficientes no nulos, los cuales podemos representar matricialmente

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{N-1} \\ H_0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_{N-1} \end{bmatrix}_{2 \times N} \quad (6.15)$$

Debido a la ortogonalidad de los filtros, tenemos que

$$\langle H_k, h_k \rangle_{\ell^2} = 0,$$

entonces podemos obtener $\{H_k\}$ a partir de $\{h_k\}$, de la siguiente manera

$$H_k = (-1)^k h_{N-1-k}.$$

Así la matriz (6.15) puede ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{N-1} \\ h_{N-1} & -h_{N-2} & h_{N-3} & \cdots & -h_0 \end{bmatrix}_{2 \times N} \quad (6.16)$$

La matriz (6.16) es llamada *Matriz de Transformada de Ondícula*. Esta matriz puede ser utilizada para obtener la matriz final con la cual se implementa el algoritmo de descomposición por ondículas.

Dado el vector de datos iniciales $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_L\}$, donde L es un número natural potencia de 2, ilustraremos la Matriz Final de Transformada de Ondícula considerando $N = 4$, ya que en general $N \ll L$.

Empezamos aumentando la matriz (6.16) con ceros hasta obtener una matriz de $2 \times L$, de la forma

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \cdots & 0 \\ h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{2 \times L}, \quad (6.17)$$

con repeticiones trasladadas de la matriz (6.17) generamos la Matriz Final de Transformada de Ondícula, tal como se muestra en (6.18).

Notemos que las filas impares corresponden a los coeficientes inter-escala correspondientes al filtro low-pass, y las filas pares corresponden a los coeficientes inter-escala correspondientes al filtro hig-pass, en cada fila impar(par) los elementos son trasladados dos columnas con respecto a la fila impar(par) anterior.

$$MF = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_0 & h_1 \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_3 & -h_2 \end{bmatrix}_{L \times L} \quad (6.18)$$

La descomposición por ondículas es computada por la aplicación de la matriz (6.18) al vector de datos, de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_0 & h_1 \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_3 & -h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{L-1} \\ f_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{-1,1} \\ d_{-1,1} \\ c_{-1,2} \\ d_{-1,2} \\ \vdots \\ c_{-1,L/2} \\ d_{-1,L/2} \end{bmatrix}$$

Obtenemos los coeficientes $c_{-1,k}$ y $d_{-1,k}$ en forma intercalada, por lo que se debe realizar una permutación para seguir aplicando el algoritmo de descomposición, es decir

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{L-1} \\ f_L \end{bmatrix} \xrightarrow{MF} \begin{bmatrix} c_{-1,1} \\ d_{-1,1} \\ c_{-1,2} \\ d_{-1,2} \\ \vdots \\ c_{-1,L/2} \\ d_{-1,L/2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ordenar}} \begin{bmatrix} c_{-1,1} \\ c_{-1,2} \\ \vdots \\ c_{-1,L/2} \\ d_{-1,1} \\ d_{-1,2} \\ \vdots \\ d_{-1,L/2} \end{bmatrix} \xrightarrow{MF} \begin{bmatrix} c_{-2,1} \\ d_{-2,1} \\ c_{-2,2} \\ d_{-2,2} \\ \vdots \\ c_{-2,L/4} \\ d_{-2,L/4} \\ d_{-1,1} \\ \vdots \\ d_{-1,L/2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ordenar}} \begin{bmatrix} c_{-2,1} \\ c_{-2,2} \\ \vdots \\ c_{-2,L/4} \\ d_{-2,1} \\ d_{-2,2} \\ \vdots \\ d_{-2,L/4} \\ d_{-1,1} \\ \vdots \\ d_{-1,L/2} \end{bmatrix} \xrightarrow{MF} \dots$$

Para cualquier vector de datos, el vector de salida en el nivel de resolución más bajo será

siempre un vector con dos coeficientes de aproximación $c_{-M,1}$ y $c_{-M,2}$ y dos coeficientes de detalle $d_{-M,1}$ y $d_{-M,2}$.

Ahora veamos el número de operaciones necesarias para el algoritmo piramidal, en el primer paso de la descomposición se requiere $2NL$ multiplicaciones y sumas, en la siguiente etapa la longitud del vector de aproximación está reducida a $N/2$, por lo tanto se requieren solo $2(NL/2)$ multiplicaciones y sumas. Entonces el total de operaciones de la descomposición por ondículas es

$$2 \left(NL + \frac{NL}{2} + \frac{NL}{4} + \cdots \right) = 2NL \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \right) \approx 4NL.$$

El proceso de la Transformada Rápida de Ondícula sólo requiere $O(L)$ operaciones, esto es todavía mucho más rápido que la Transformada de Fourier, la cual requiere $O(L \log_2 L)$ operaciones.

Visto desde el lado computacional, una implementación adecuada de la TRO procesa la información mucho más rápido que usando la transformada rápida de Fourier (TRF), además que dependiendo de la naturaleza del AMR, en general, los coeficientes no nulos en la matriz de la TRO son mucho menores que en la matriz asociada a la TRF.

6.4 Ejemplos

Ejemplo 6.1 (Filtro low-pass asociado al AMR de Haar) En el Ejemplo 5.2 se calcularon los coeficientes del filtro low-pass asociado al AMR de Haar, ya que partiendo de (6.1) y del hecho

$$\phi(2x - k) = \chi_{[0,1)}(2x - k) = \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})}(x).$$

Se obtiene

$$\chi_{[0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \chi_{[0, \frac{1}{2})}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}(x).$$

De donde obtenemos la sucesión $\{h_k\}$ definida como

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ si } k = 0, 1 \\ 0 & , \text{ de otro modo.} \end{cases}$$

Entonces el filtro low-pass queda definido como

$$\begin{aligned} m_\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ixk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (h_0 e^0 + h_1 e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ix} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-ix}). \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2 (Filtro high-pass asociado al AMR de Haar) La construcción de este filtro es de manera análoga a la construcción del filtro low-pass, así partimos de (6.2) para obtener

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \sqrt{2} \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})}(x).$$

Entonces como $\psi = \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}$, la sucesión $\{H_k\}$ queda definida como

$$H_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ si } k = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ si } k = 1 \\ 0 & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el filtro high-pass queda definido como

$$\begin{aligned} M_\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k e^{-ixk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (H_0 e^0 + H_1 e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ix} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-ix}). \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3 (Operador Aproximación para el AMR de Haar) Consideremos la función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto definida como

$$f(x) = \begin{cases} \cos(4\pi x) \cos(2\pi x) & , \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 & , \text{ de otro modo.} \end{cases}$$

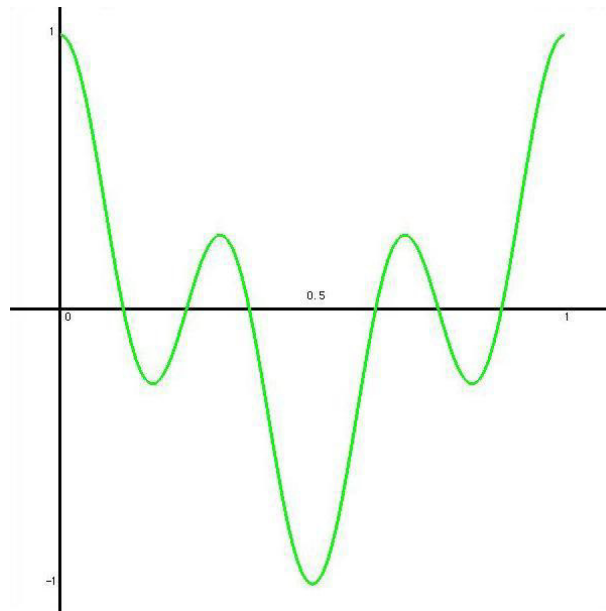


Figura 6.3: Grafico de f , función original del Ejemplo 6.3

Recordemos que para el AMR de Haar tenemos $\phi = \chi_{[0,1]}$ entonces

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]}$$

Como $Supp(f) = [0, 1]$, entonces al aplicar P_j obtenemos

$$P_j f = \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} = \sum_{k=0}^{2^j-1} f(2^{-j}k) \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]}.$$

A continuación vemos los gráficos de las proyecciones P_5 , P_8 y P_{10} respectivamente.

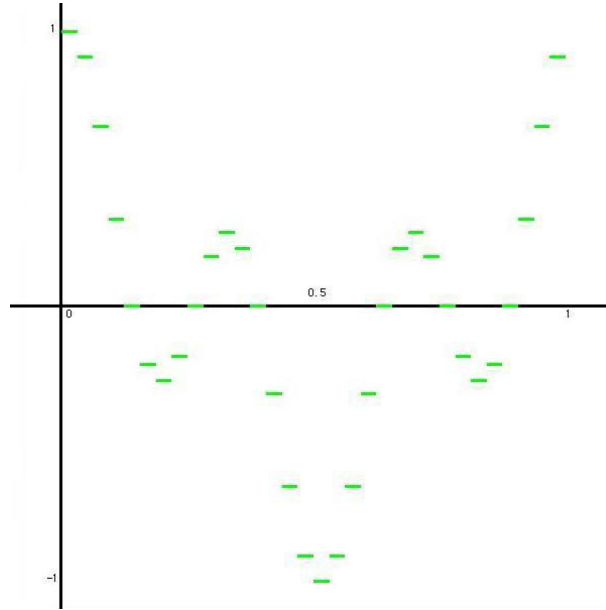


Figura 6.4: Grafico de la función $P_5 f$

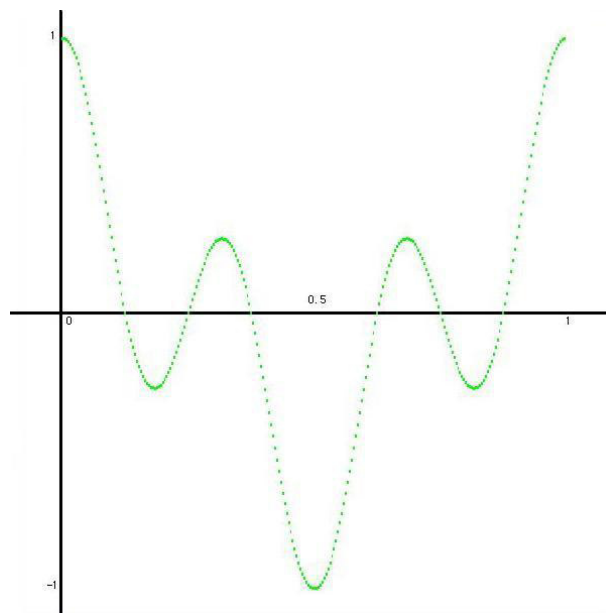


Figura 6.5: Grafico de la función $P_8 f$

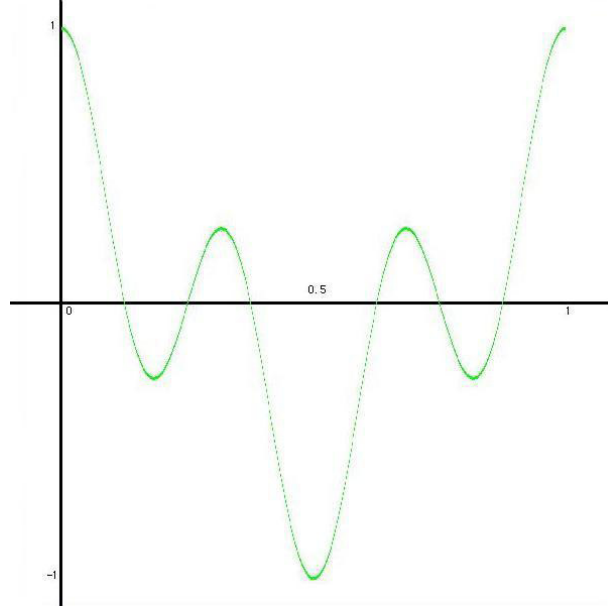


Figura 6.6: Grafico de la función $P_{10}f$

Ejemplo 6.4 (TRO para el AMR de Haar) En Ejemplo 6.1 y Ejemplo 6.2 obtuvimos los coeficientes $\{h_k\}$ y $\{H_k\}$, entonces la Matriz de Transformada de Ondículas es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si consideramos el siguiente vector columna, como el vector de datos

$$F = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ -10 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Notemos que para este caso $L = 8 = 2^3$, entonces la Matriz Final de Transformada de Ondícula es

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego de $AF = F_1$, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 16 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -16 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Ordenando tenemos

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 16 \\ -1 \\ 1 \\ -16 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

donde los 4 primeros elementos de F_1 corresponden a $P_{-1}F$ y los 4 últimos a $Q_{-1}F$.

Capítulo 7

Aplicación al Procesamiento de Imágenes

En este capítulo veremos la aplicación de los algoritmos piramidales, mediante el uso de la TRO, los algoritmos piramidales fueron desarrollados originalmente por Peter Burt y Edward Adelson en 1982, y posteriormente Stéphane Mallat lleva estos algoritmos al contexto de las ondículas reestructurándolos con la teoría del AMR.

Para implementar la matriz final de transformada de ondícula, la cual está formada por los coeficientes interescala asociados a un análisis multiresolución, es necesario escoger un AMR del cual ya se siente la información necesaria.

En las secciones 5.4 y 6.4, ejemplos de AMR y ejemplos de descomposición y reconstrucción basada en ondículas respectivamente, se dio énfasis al AMR de Haar y se vio la obtención de los coeficientes interescala, construcción de filtros y construcción de la matriz final de transformada de ondícula (MFTO). Además la MFTO para el AMR de Haar sólo contiene dos términos no nulos por cada fila lo que hace que su implementación sea sencilla además de tener bajo costo computacional. Por éstas razones utilizamos el análisis multiresolución de Haar para la implementación de las aplicaciones.

7.1 Representación de Imágenes

En el capítulo anterior se vio la TRO, la cual es representada por una matriz, entonces es necesario poder expresar las imágenes en un formato con el cual se pueda realizar manipulaciones mediante la TRO i.e. debemos dar una representación matricial o afín para las imágenes.

Si tenemos una imagen en escala de grises de $M \times N$ píxeles, esta imagen la podemos representar por una matriz I de orden $M \times N$, donde cada elemento de la matriz $I_{i,j}$ corresponde con el valor de la tonalidad del píxel (i, j) de la imagen. Esta correspondencia se hace mediante una escala de tonalidades, que van de la tonalidad negro a la tonalidad blanco, que es cuantificada de 0 a 1, a la tonalidad negro le corresponde el valor de 0 y

para la tonalidad blanco el valor de 1, las demás tonalidades tienen un valor entre 0 y 1, tal como se puede ver en la Figura 7.1.

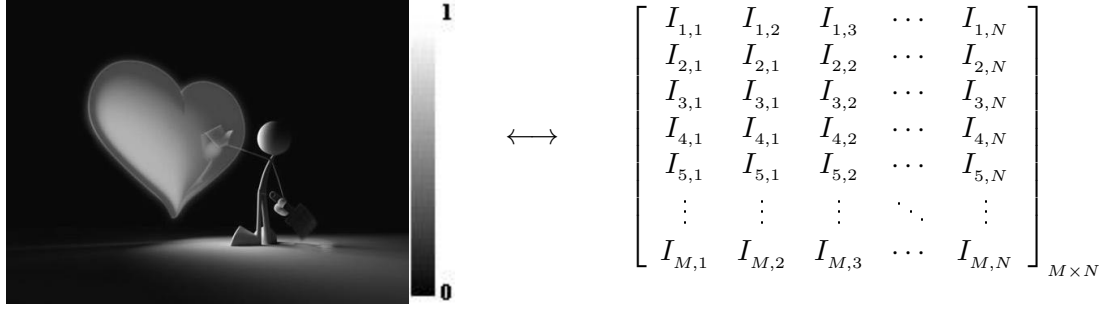


Figura 7.1: Representación matricial de una imagen en escala de grises

Hay diversas maneras de representar imágenes a colores, una de las más frecuentes es por medio del espacio de colores RGB (Red - Green - Blue) el cual descompone una imagen a color en base a los tres colores primarios rojo, verde y azul. Éste es un espacio de síntesis aditiva, con el cual es posible representar un color mediante la mezcla de los tres colores primarios RGB.

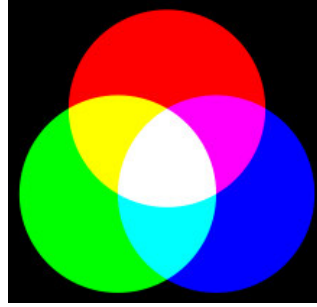


Figura 7.2: Espacio de colores RGB

Entonces una imagen a color va a ser modelada por síntesis aditiva de 3 imágenes correspondientes a los colores rojo, verde y azul, es decir la imagen a color I de $M \times N$ píxeles se va poder modelar por tres imágenes I_R , I_G e I_B , donde I_R es la componente de la imagen en escala de rojos, I_G es la componente de la imagen en escala de verdes e I_B es la componente de la imagen en escala de azules. De esta manera cada imagen a color I de $M \times N$ píxeles e puede representar por síntesis aditiva de tres matrices I_R , I_G e I_B de orden $M \times N$ cada una. Como se puede ver en la Figura 7.1.

Una buena práctica en la programación es evitar el uso excesivo de variables. Para evitar el trabajar con tres matrices podemos optar por utilizar una hipermatriz Img orden $M \times N \times 3$ donde el primer nivel de la hipermatriz $Img_{M \times N \times 1}$ corresponde a la imagen en escala de rojos, el segundo nivel $Img_{M \times N \times 2}$ a la imagen en escala de verdes y el tercer nivel $Img_{M \times N \times 3}$ a la imagen en escala de azules, de esta manera tenemos los tres componentes de la imagen en un solo objeto, lo cual resulta más práctico al momento de realizar las implementaciones computacionales.

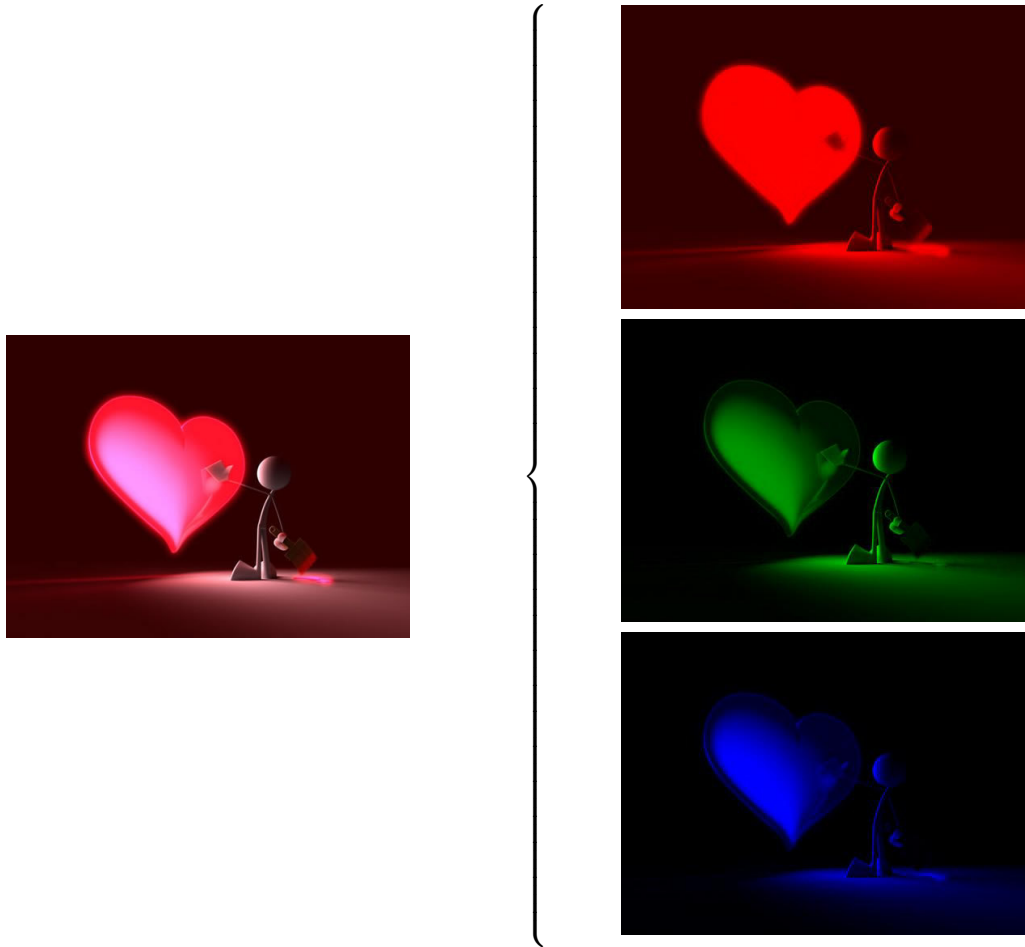


Figura 7.3: Representación de una imagen en el espacio de colores RGB

7.2 Descomposición y Reconstrucción de Imágenes

Una vez representada la imagen de manera computable, podemos realizar todo tipo de operaciones sobre la misma, empezaremos ilustrando la aplicación de los algoritmos piramidales a imágenes en escala de grises y después generalizaremos el proceso para imágenes en color RGB.

7.2.1 Transformada Rápida de Ondícula Bidimensional

En el capítulo anterior vimos el funcionamiento de la Transformada Rápida de Ondícula (TRO) aplicada a un vector de datos, entonces al ser nuestro dato una matriz, se procede aplicando la TRO a cada columna de la matriz luego ordenamos los resultados para aplicar nuevamente la TRO a cada fila y se procede a ordenar los datos. De esta forma se obtiene la TRO bidimensional.

El procedimiento anterior puede ser implementado, mediante operaciones matriciales, de la siguiente forma

$$TRO(f) = [MF_{M \times M}] [f] \xrightarrow{\text{ordenar}} [MF_{M \times M}] [f] [MF_{N \times N}^T] \xrightarrow{\text{ordenar}}$$

Donde f es una imagen en escala de grises de $M \times N$ píxeles, $TM_{M \times M}$ es la Matriz Final de Transformada de Ondícula (6.18) de $M \times M$ y $TN_{N \times N}^T$ es la transpuesta de Matriz Final de Transformada de Ondícula (6.18) de $N \times N$. Recordemos que tanto TM y TN se construyeron para el AMR Haar como ya se vio en la Sección 6.4.

Ilustraremos procedimiento de la TRO bidimensional aplicándolo a la imagen de Lena Söderberg mostrada en Figura 7.4.



Figura 7.4: Imagen de prueba, en escala de grises, representada por $[f]$

La Figura 7.4 es de 512×512 píxeles por lo que su representación matricial será $Img_{512 \times 512}$, es decir $M = 512$ y $N = 512$, para construir las matrices $MF_{M \times M}$ y $MF_{N \times N}$ utilizamos la descripción dada en (6.18) y procedemos a realizar el primer producto $[MF_{M \times M}][f]$. Así obtenemos el resultado mostrado en la Figura 7.5.



Figura 7.5: Resultado del producto $[MF_{M \times M}][f]$

Antes de realizar el producto $[MF_{M \times M}][f][MF_{N \times N}^T]$, es necesario ordenar las filas de la matriz $[MF_{M \times M}][f]$, como ya se explicó en el capítulo anterior. Este ordenamiento se

puede realizar sin mayor inconveniente con un barrido a lo largo de las filas tal como se ve en el Algoritmo B.1. El resultado es mostrado en la Figura 7.6,



Figura 7.6: Resultado de ordenar las filas del producto $[MF_{M \times M}] [f]$

el cual puede ser interpretado como la aplicación de de la TRO a las filas de la matriz que representa a la Figura 7.4, es decir una aplicación unidimensional. Ahora si realizamos la segunda multiplicación por $[MF_{N \times N}^T]$, lo que corresponde a la aplicación de la TRO a las columnas de la matriz que representa a la Figura 7.4, se completa la aplicación bidimensional de la TRO salvo por el ordenamiento de las columnas. Este resultado es mostrado en la Figura 7.7.



Figura 7.7: Resultado de $[MF_{M \times M}] [f] [MF_{N \times N}^T]$

Para terminar con la aplicación de la TRO bidimensional a la imagen de la Figura 7.4, sólo resta ordenar las columnas de la matriz $[MF_{M \times M}] [f] [MF_{N \times N}^T]$, lo cual podemos realizar nuevamente con el Algoritmo B.1 teniendo en cuenta algunas consideraciones adicionales para obtener el resultado mostrado en la Figura 7.8.



Figura 7.8: Resultado correspondiente a $TRO(f)$

La implementación de LA TRO bidimensional hereda el mismo inconveniente de la TRO, el cual es el tiempo requerido para tener que ordenar las filas/columnas antes de poder continuar con una siguiente aplicación de la TRO, este inconveniente puede ser solucionado gracias a las propiedades matriciales, esto quiere decir que si construimos la Matriz Final de Transformada de Ondícula (6.18) con las filas permutadas, de la siguiente forma

$$\overline{MF} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_0 & h_1 \\ h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_3 & -h_2 \end{bmatrix},$$

el procedimiento para obtener la TRO bidimensional se simplifica a

$$TRO(f) = [\overline{MF}_{M \times M}] [f] [\overline{MF}_{N \times N}^T]. \quad (7.1)$$

De esta manera se obtiene en forma directa el resultado mostrado en la Figura 7.8, además de poderse aplicar la TRO de forma iterada sin necesidad de ordenamientos.

El procedimiento ilustrado en (7.1) resume la aplicación de la TRO bidimensional a una imagen en escala de grises. Este procedimiento se puede generalizar para imágenes a color RGB. Recordemos que las imágenes a color RGB son representadas por una hipermatriz, entonces para generalizar este procedimiento a imágenes a color basta con aplicar el procedimiento (7.1) a cada nivel de la hipermatriz, es decir a la imagen en escala de rojos, a la imagen en escala de verdes y a la imagen en escala de azules.

La implementación de programas relacionados al tratamiento de imagen demanda demasiado tiempo ya que se requiere de la manipulación de punteros, gestión de memoria, etc. Por eso suelen hacerse en lenguaje C++ (que por sus características compartidas de alto y bajo nivel lo hacen el más apropiado para la implementación de estos programas). Para evitar este tipo de problemas sólo se realizara una implementación a modo de prototipo en MATLAB® *R2010a*.

Así siguiendo las consideraciones anteriores se desarrolló el algoritmo *TRO3* (B.2), que aplica la TRO bidimensional, asociada al AMR de Haar, a cualquier imagen ya sea en escala de grises o en color. Notemos que el procedimiento puede repetirse para obtener descomposiciones de mayor orden.

7.2.2 Resultados sobre la TRO bidimensional

Consideremos la imagen mostrada en la Figura 7.9, de dimensiones 514×768 píxeles, tipo imagen JPEG y tamaño 131 Kb.



Figura 7.9: Facultad de Ciencias Matemáticas (FCM)

Después de aplicar *TRO3*, se obtiene la siguiente imagen mostrada en la Figura 7.10 de dimensiones 514×768 píxeles, tipo imagen JPEG y tamaño 53.2 Kb, donde el primer bloque corresponde a la aproximación de imagen con menor resolución y los demás bloques corresponden a la información del detalle de la imagen.

La imagen mostrada en la Figura 7.11 corresponde al primer bloque de la Figura 7.10, resultado de aplicar *TRO3*, esta aproximación de la imagen original es de dimensiones 257×384 píxeles, tipo imagen JPEG y de tamaño 23.2 Kb.

Notemos que el proceso de descomposición es completamente reversible, esto se debe a



Figura 7.10: Resultado de aplicar $TRO3$



Figura 7.11: Aproximación con menor resolución de la FCM

que las matrices $\overline{MF}_{M \times M}$ y $\overline{MF}_{N \times N}$ están formadas por filas ortogonales por lo que son invertibles, es decir existen $\overline{MF}_{M \times M}^{-1}$ y $\overline{MF}_{N \times N}^{-1}$, luego del procedimiento (7.1) obtenemos

$$\left[\overline{MF}_{M \times M}^{-1} \right] [TRO(f)] \left[\left(\overline{MF}_{N \times N}^{-1} \right)^T \right] = f$$

Con lo cual se desarrolló el algoritmo $TROI3$ (B.3) para hacer el proceso de reconstrucción de las imágenes.

Ahora veamos cómo obtener descomposiciones de mayor orden con la TRO bidimensional, para ilustrar esto continuamos con la imagen mostrada en la Figura 7.9 como nuestra imagen de prueba. Para la cual la Figura 7.10 muestra el resultado de aplicar la TRO bidimensional a la imagen de prueba i.e la descomposición a 1 nivel. Para obtener la descomposición a 2 niveles, se aplica nuevamente la TRO bidimensional pero no a toda imagen sino tan sólo a la sección de la imagen correspondiente a la aproximación de la imagen en el primer nivel de descomposición. Esto es la imagen mostrada en la Figura 7.11. El resultado de la segunda aplicación de la TRO bidimensional es mostrado en la Figura 7.12.



Figura 7.12: Descomposición de la aproximación de la FCM

Luego la descomposición a 2 niveles corresponde a la imagen obtenida al reemplazar la aproximación, mostrada en la Figura 7.11, por su descomposición correspondiente, mostrada en la Figura 7.12. Este resultado se muestra en la Figura 7.13.

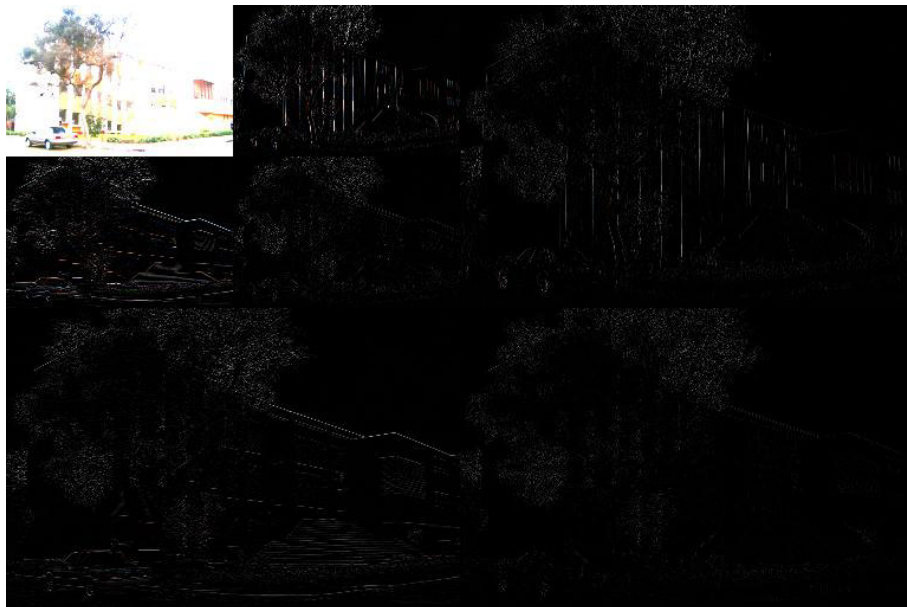


Figura 7.13: Descomposición a 2 niveles

Este procedimiento se puede generalizar para obtener descomposiciones a cualquier nivel, pero debido a las características de la TRO bidimensional asociada al AMR de Haar, en la mayoría de imágenes se pierde la totalidad de su información en la aproximación de la descomposición a 4 niveles. Por esta razón lo más recomendable es sólo trabajar como máximo con una descomposición a 3 niveles.

7.3 Detección de Bordes

Los bordes de una imagen se pueden definir como cualquier discontinuidad que sufre alguna función de intensidad sobre los puntos de la misma i.e. transiciones entre dos regiones de niveles de gris significativamente distintos. Y contienen información valiosa sobre las fronteras de los objetos pertenecientes a la imagen, por lo que son utilizados principalmente en los procesos de segmentación de imagen y reconocimiento de objetos.

La detección de bordes por ondículas es consecuencia del proceso de descomposición y reconstrucción con la TRO, para ello se desarrolló el algoritmo *Detección de Bordes* (B.4). Ilustraremos el proceso de detección de bordes de la imagen mostrada en la Figura 7.14, a la cual nos referiremos como f , esta imagen es de dimensiones 570×712 , tipo imagen JPEG y de tamaño 131 Kb.

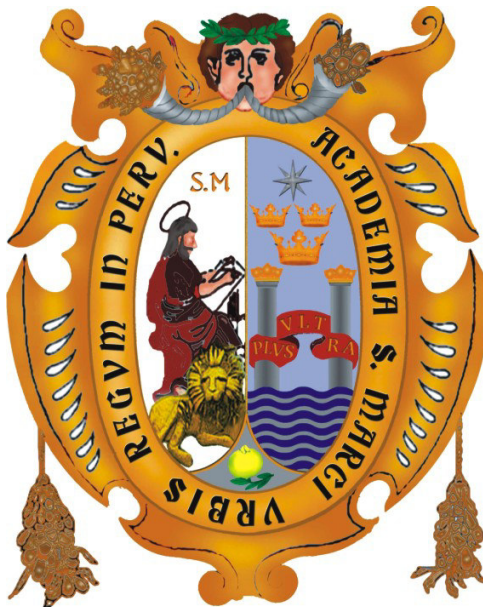


Figura 7.14: Escudo UNMSM

Antes de empezar a explicar el procedimiento de la detección de bordes, es necesario tener algunos conocimientos del espacio de color YUV el cual codifica una imagen a color de acuerdo a la percepción del ojo humano. YUV define un espacio de color en términos de una componente de luminancia (Y) y dos componentes de cromatina (UV). Para una imagen a color RGB podemos hallar sus componentes en el espacio YUV mediante la transformación mostrada en (7.2). Para mayor información ver Koschan[13].

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.418 & -0.289 & 0.437 \\ 0.615 & -0.515 & -0.100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Para la detección de bordes trabajaremos con la luminancia de la imagen f es decir la componente Y del modelo YUV , la cual corresponde a la información sobre la claridad del píxeles (claro/oscuro) de la imagen. La luminancia puede ser calculada de (7.2) mediante la siguiente ecuación

$$Y(f) = 0.299 \times I_R(f) + 0.587 \times I_G(f) + 0.114 \times I_B(f)$$

donde I_R denota la imagen en escala de rojos, I_G , la imagen en escala de verdes, I_B la imagen en escala de azules. Un ejemplo de esta representación, de componentes de una imagen a colores RGB, fue mostrado en la Figura 7.3.

Después se realiza la descomposición a 1 nivel, es decir aplicado TRO3 a $Y(f)$, el resultado es mostrado en la Figura 7.15, luego aplicamos nuevamente TRO3 pero solo al bloque que contiene la imagen aproximada, el resultado es mostrado en la Figura 7.16a.

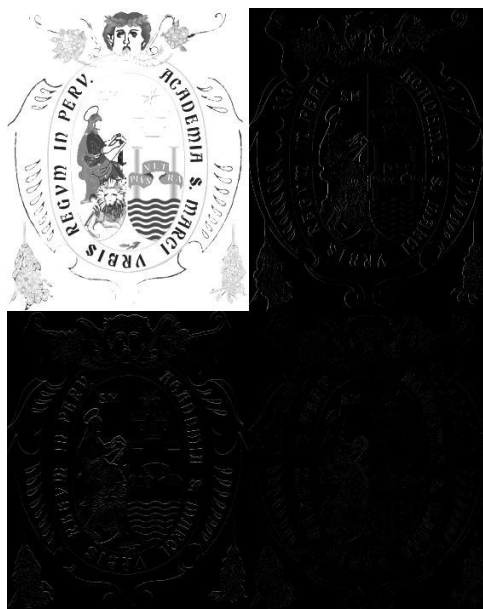


Figura 7.15: Resultado de aplicar TRO3 a $Y(f)$

El paso fundamental en la detección de bordes es depreciar los datos de la imagen aproximada i.e. reemplazar los datos correspondientes a la imagen aproximada por ceros. La imagen resultante se muestra en la Figura 7.16b. Ahora procedemos a aplicar TROI3, el resultado se muestra en la Figura 7.16c. Notemos que esta imagen corresponde a los bordes del bloque de la imagen aproximada mostrada en la Figura 7.15.

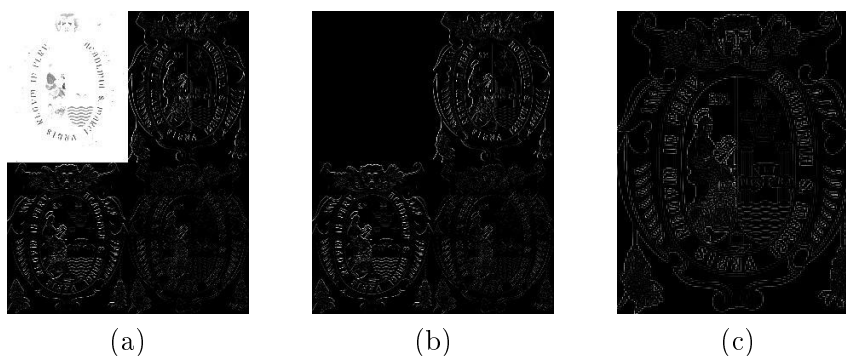


Figura 7.16: (a) Resultado de aplicar nuevamente TRO3, (b) Depreciado de datos en la segunda descomposición, (c) Bordes de la imagen aproximada

Luego procedemos a reemplazar el bloque correspondiente a la imagen aproximada, mostrada en la Figura 7.15, por la imagen mostrada en la Figura 7.16c. El resultado de este proceso se muestra en la Figura 7.17.

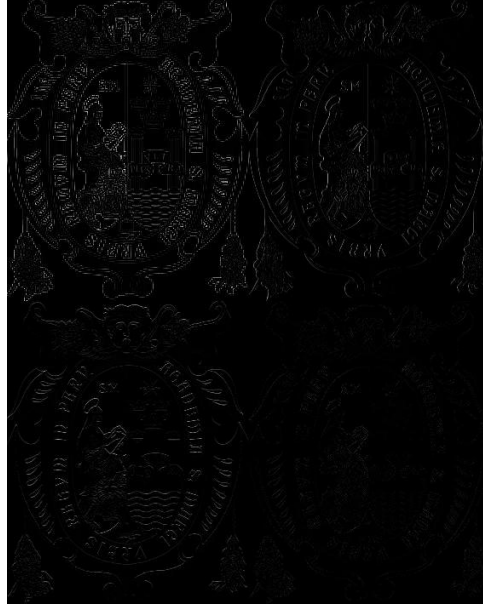
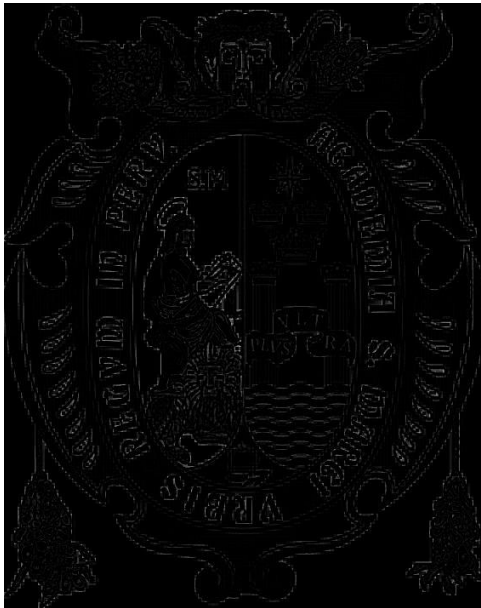


Figura 7.17: Nueva imagen a procesar

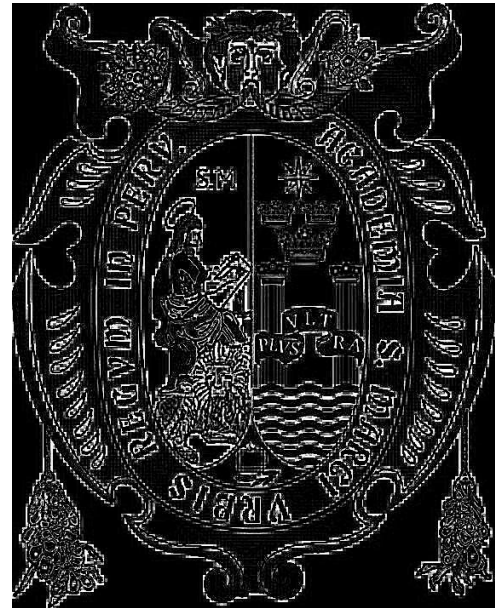
Aplicamos nuevamente TROI3, pero esta vez a la imagen mostrada en la Figura 7.17, el resultado lo mostramos en la Figura 7.18a, éste resultado tiene poca luminancia por lo que no se aprecia bien para ello aplicamos un factor de corrección de luminancia, es decir el último paso lo realizamos de la siguiente forma

$$B(f) = 10 \times TROI3(f_{aux}),$$

donde denotamos por f_{aux} a la imagen mostrada en la Figura 7.18a, para obtener nuestro resultado final mostrado en la Figura 7.18b.



(a)



(b)

Figura 7.18: (a) Bordes iniciales, (b) Bordes finales

7.4 Compresión de Imagen

La compresión de imagen surge debido a la problemática de almacenar imágenes que tienen gran cantidad de información, ya que requieren demasiado espacio de almacenamiento, por lo que se empieza a buscar formas y métodos de reducir la información de la imagen en contraste con la calidad gráfica i.e. reducir el espacio de almacenamiento requerido sin provocar una notable degradación de la información que contiene la imagen.

El procedimiento de compresión de imagen por ondículas, también es consecuencia del uso iterativo de los algoritmos de descomposición y reconstrucción por ondículas, para este procedimiento se desarrolló el Algoritmo *Compresión de Imagen B.5*. Igual que en la detección de bordes ilustraremos el procedimiento aplicándolo a una imagen de prueba, a la cual nos referiremos con f y se muestra en la Figura 7.19. La cual es una imagen de dimensiones 400×508 píxeles, tipo imagen JPEG y de tamaño 39.5 KB.



Figura 7.19: Imagen f , Huaco Mochica

El primer paso es aplicar el algoritmo de descomposición, es decir aplicamos *TRO3* a f , obtenemos así el resultado mostrado en la Figura 7.20

El paso crucial en la compresión de imagen por ondículas es el filtrado de datos para reducir la información, para esto utilizamos el método de compresión por umbral. El umbral o *threshold* es un valor mínimo establecido con algún fin, en este caso el objetivo es establecer un valor referencial para hacer el filtrado de datos.

La compresión por umbral consiste en establecer un umbral para luego depreciar los datos cuyo valor sea inferior al umbral, existen diversas técnicas por las cuales se puede escoger umbrales de distintos, nosotros utilizaremos una razón porcentual.



Figura 7.20: Resultado de $TRO3(f)$

Para $f = (f_{i,j})$, la imagen en escala de grises de dimensiones $M \times N$, el umbral se puede estimar mediante la siguiente formula

$$\lambda = \underset{i,j}{\text{m}{\acute{a}ximo}} |f_{i,j}| \frac{U}{100} \quad (7.3)$$

donde U es par{a}metro dado, $1 \leq i \leq M$ y $1 \leq j \leq N$.

De esta forma la elecci{on} del umbral se realiza en funci{on} del m{a}ximo valor absoluto encontrado en la imagen. Una vez determinado el umbral de compresi{on} se procede a depreciar los valores de la descomposici{on} de la imagen que sean menores al umbral, en nuestra representaci{on} matricial esto quiere decir convertir a cero los valores inferiores al umbral.

Ilustremos esto con $U = 20$, lo cual da un umbral de compresi{on} igual al 20% de la m{a}xima intensidad de la imagen. En la Figura 7.21 se muestra el resultado de depreciar los datos de la aproximaci{on} de la imagen f , mostrada en la Figura 7.20, con umbral de 20%.

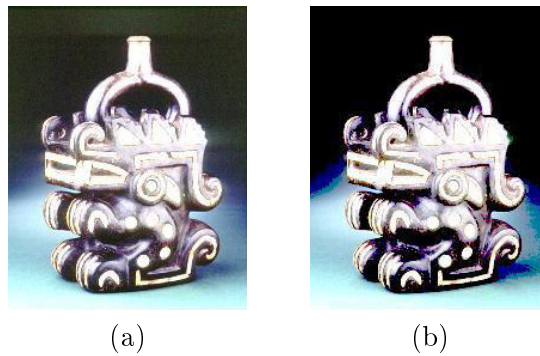


Figura 7.21: (a) Antes del umbral, (b) Despu{es} del umbral

El procedimiento (7.3) es para una imagen en escala de grises pero si nuestra imagen f es una imagen a color RGB de dimensiones $M \times N$, se calcula un umbral utilizando (7.3) para cada componente de la imagen, es decir un umbral para I_R , I_G y I_B respectivamente, y se deprecian los datos en cada componente de la imagen obteniéndose resultados como el mostrado en la Figura 7.21.

El último paso para la compresión es reconstruir la imagen después de haber realizado el filtrado de datos, para ello aplicamos *TROI3*. Así obtenemos el resultado mostrado en la Figura 7.22b la cual resulta con un tamaño de 28.2 KB. Para comparar resultados se muestra en la Figura 7.22a la compresión de f tomando como umbral el 10% la cual resulta con un tamaño de 33.8 KB.

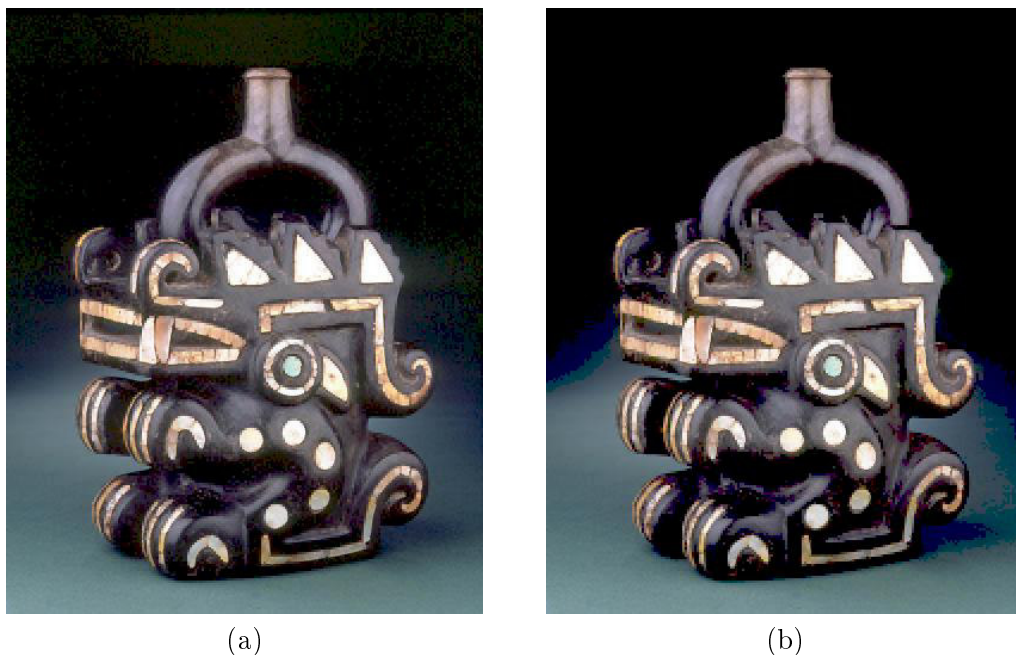


Figura 7.22: (a) Compresión a umbral de 10%, (b) Compresión a umbral de 20%

7.5 Reducción de Ruido

En informática, se llama ruido a los datos sin significado que distorsionan la calidad de la información. En una imagen el ruido es la variación aleatoria (que no se corresponde con la realidad) del brillo o el color de la misma. La reducción de ruido, sin duda alguna, es un alivio para mejorar la nitidez de las imágenes. Éste procedimiento es usado en dispositivos digitales (cámaras, filmadoras, etc.) y también suele ser acoplado en otras aplicaciones, principalmente en la detección de bordes, obteniéndose mejores resultados.

Existen distintos tipos de ruido, los más comunes son ruido *sal y pimienta*, ruido *Gaussiano*, ruido de *disparo* y ruido *uniforme* o ruido *blanco*.

Ilustraremos el procedimiento de reducción de ruido por ondículas utilizando la misma metodología utilizada en las aplicaciones anteriores, para esto se desarrolló el Algoritmo *Reducción de Ruido* B.6, aplicando este procedimiento a la imagen de prueba, a la cual denotaremos como f , mostrada en la Figura 7.23.



Figura 7.23: Manto Paracas, con ruido Gaussiano

Este procedimiento es bastante parecido al de compresión de imagen, ya que descomponemos f con *TRO3*, luego utilizamos un umbral para depreciar los coeficientes menores al mismo y después reconstruimos la imagen con *TROI3*.

Para depreciar los datos utilizamos una técnica que recibe varios nombres dependiendo del autor, alguno de ellos son *universal threshold*, *visushrink* y *fixed form threshold*. Este procedimiento consiste en utilizar un umbral determinado por la formula

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log n}$$

donde n es la longitud de la señal a limpiar y σ es un estimador al nivel de ruido presente en la señal. Para nuestro caso la señal es bidimensional es decir una imagen de $M \times N$ píxeles, entonces consideramos

$$n = \text{mediana} \{M, N\}$$

Y el estimador al nivel de ruido lo calculamos con los coeficientes de detalle después de haber aplicado *TRO3*, esto es

$$\sigma = \frac{\text{mediana} \{d_{i,j}, \text{ con } i = 1, \dots, M \text{ y } j = 1, \dots, N\}}{0.6745}$$

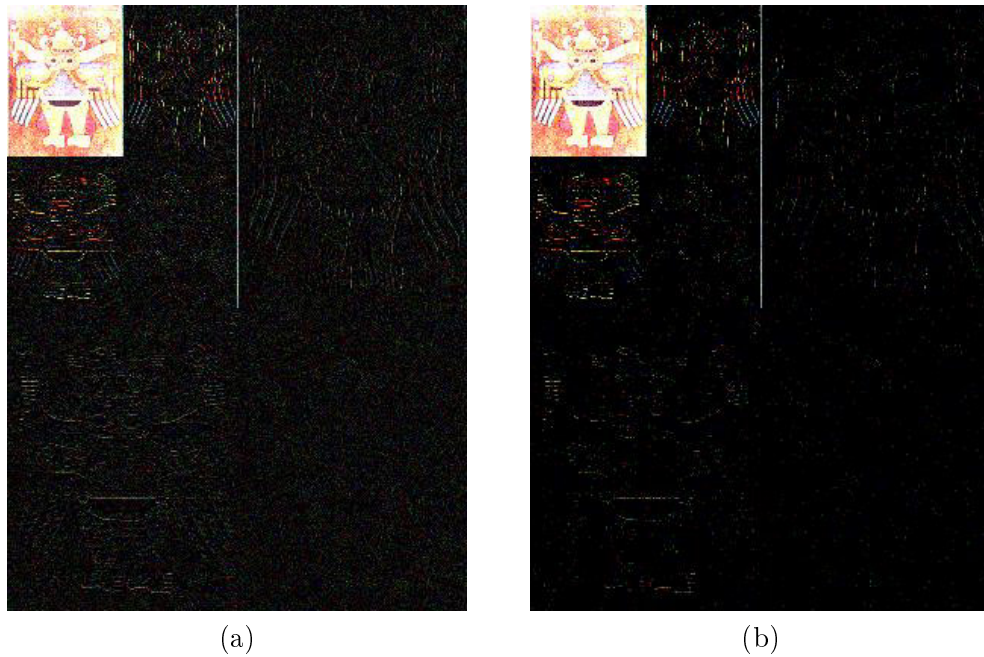


Figura 7.24: (a) Descomposición de f con ruido, (b) Reducción de ruido en la descomposición de f

Una vez determinado el umbral, se procede a convertir a cero cualquier valor, de la descomposición, que sea menor al umbral. En la Figura 7.24a se aprecia la descomposición de f y en la Figura 7.24b se aprecia la descomposición de f después de haber depreciado los valores menores al umbral establecido. Para terminar con este procedimiento aplicamos *TROI3*. Así obtenemos el resultado mostrado en la Figura 7.25b y además puede compararse con la imagen original mostrada en la Figura 7.25a.

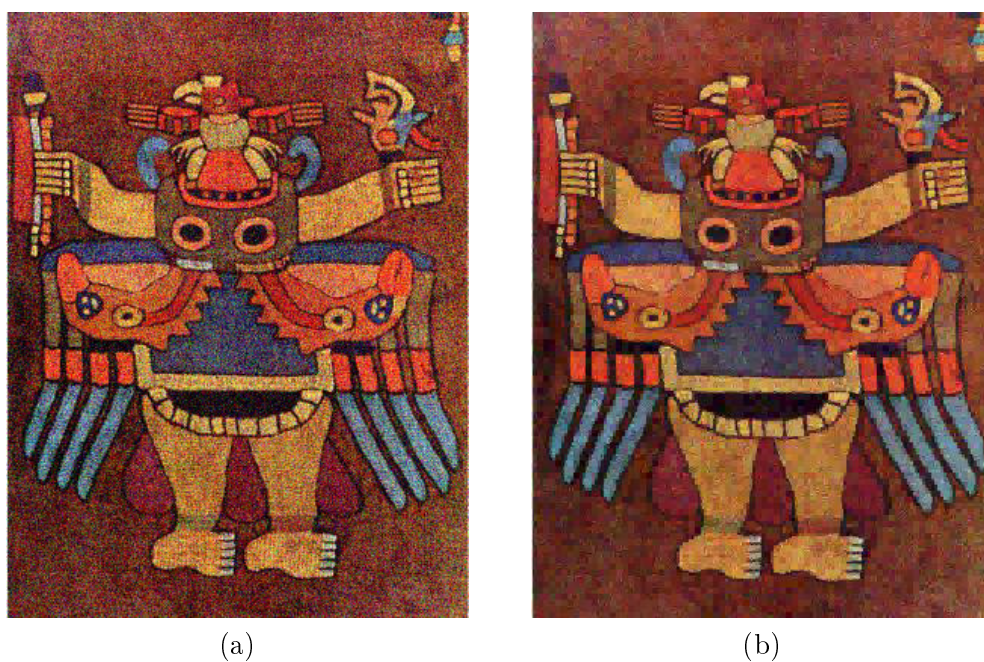


Figura 7.25: (a) Imagen inicial (b) Imagen después de la reducción del ruido

7.6 Interface Gráfica

Después de haber desarrollado la teoría matemática del Análisis de Ondículas y haber aplicado la TRO bidimensional al procesamiento de imágenes, decidimos hacer un pequeño sistema para gestionar los procedimientos vistos en este capítulo, además de brindar las funcionalidades necesarias para un uso directo de estos procedimientos desarrollados sin la necesidad de tener mayor conocimiento del software en el que se desarrolló.

Los ejemplos de los procedimientos vistos en las secciones anteriores fueron desarrollados en MATLAB[®] R2010a por las facilidades que brinda para el desarrollo de prototipos, una de ellas es la herramienta GUIDE la cual permite dotar de una interface gráfica de usuario a los programas desarrollados en MATLAB[®] R2010a.

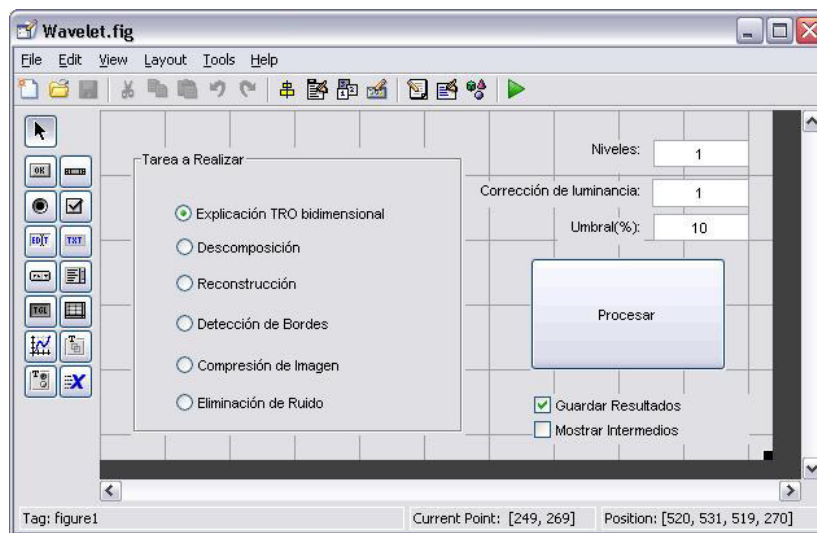


Figura 7.26: Desarrollo de la interface gráfica de usuario

Un requerimiento no funcional para el sistema sería otorgar al usuario la facilidad de escoger la imagen con la que se desee trabajar de manera dinámica lo cual se consiguió a través del uso de la función *uigetfile*.

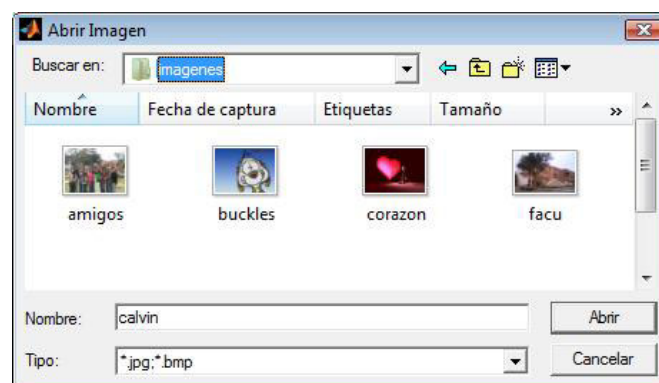


Figura 7.27: Utilizando *uigetfile* para leer imágenes

Otro requerimiento no funcional para el sistema es brindar al usuario la capacidad de escoger el número de aplicaciones de la TRO que se van a realizar sobre la imagen al momento de efectuar la descomposición/reconstrucción o detección de bordes, para esto se utilizó en conjunto un *Static Text* y un *Edit Text*.



Figura 7.28: Utilizando *Static Text* y *Edit Text*

De igual manera es posible que se quiera aplicar un factor de corrección de luminancia diferente, para lo cual se utiliza las mismas herramientas que para el número de aplicaciones de la TRO.

Los requerimientos funcionales son los procedimientos estudiados anteriormente i.e. la aplicación del algoritmo de descomposición por ondículas, la aplicación del algoritmo de reconstrucción por ondículas y la detección de bordes como consecuencia de los dos procesos anteriores, a estos procesos se le agrega la explicación de la TRO bidimensional. Para ello utilizamos una estructura formada por los siguientes componentes *Button Group* y *Radio Button*.

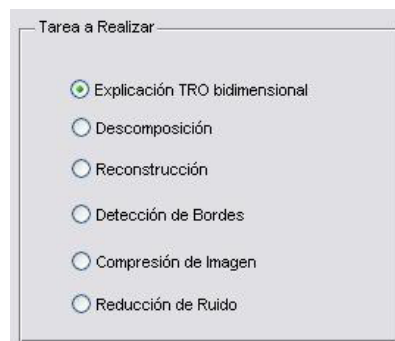


Figura 7.29: Utilizando *Botton Group* y *Radio Button*

La estructura mostrada en la Figura 7.29 es sólo para seleccionar alguno de los procedimientos ya mencionados, después de haber acomodado los valores pertinentes a *Niveles* y *Corrección de luminancia* y/o *umbral*, la tarea seleccionada será activada con *procesar*, el cual es un componente *Push Button*.



Figura 7.30: Utilizando *Push Button*

Para hacer más dinámica la explicación de los procesos utilizamos la técnica de programación conocida como banderas (*flags*), se utilizaron dos banderas para indicar el guardado de imágenes que se producen y el mostrar los resultados intermedios de los procesos anteriores. Para esto se utilizó el componente *Check Box*.



Figura 7.31: Utilizando *Check Box*

De esta manera se termino el diseño de la interface gráfica del prototipo al que se llamó *Wavelet*, la implementación de los procedimientos llamados *Tareas a Realizar* no son otra cosa que la codificación sistemática en MATLAB[®] R2010a de los procedimientos ya explicados en las secciones anteriores, el código completo de este prototipo puede ser visto en el Apéndice C.

Adicionalmente en el Apéndice D se muestran diversos resultados obtenidos con el prototipo *Wavelet*.



Figura 7.32: Prototipo *Wavelet*

Discusión

- En el tercer capítulo se desarrolló la matemática de las ondículas, se demostraron resultados para la Transformada Continua de Ondícula muchos de los cuales también se cumplen con la Transformada Continua de Fourier, tales como la relación de Parseval, la formula de inversión e isometría, entre otros. Es por eso que el Análisis de Ondículas es considerado como un refinamiento del Análisis de Fourier, por lo que puede ser aplicado a los mismos campos.
- En el cuarto capítulo se desarrolló la matemática de los frames que es necesaria para poder redefinir el concepto de una ondícula en función de bases de Riesz, con este resultado en el quinto capítulo se desarrolló la matemática del Análisis Multiresolución que sirve de base para el desarrollo de los algoritmos de descomposición y reconstrucción por ondículas o simplemente algoritmos piramidales los cuales fueron desarrollados en el sexto capítulo.
- En el séptimo capítulo se desarrollaron las aplicaciones: detección de bordes, compresión de imagen y reducción de ruido. Esto debido a que estas aplicaciones comparten el mismo procedimiento general, el cual básicamente consta de tres etapas
 1. Descomposición de la imagen (d niveles de descomposición).
 2. filtrado de datos (umbral λ).
 3. Reconstrucción de la imagen (d niveles de composición).
- Las diferencias en los procedimientos de las aplicaciones desarrolladas ocurren en la segunda etapa (filtrado de datos) de la siguiente forma
 - Detección de bordes: se deprecia toda la información de la imagen aproximada.
 - Compresión de imagen: se deprecia la información menor al umbral.
 - Reducción de ruido: se deprecia la información menor al umbral.
- En la aplicación detección de bordes se trabaja con la luminancia de la imagen la cual nos da una representación en escala de grises de la imagen a tratar. Un inconveniente de este proceso puede ser la baja luminancia presente en los resultados por lo que adicionalmente se tiene que aplicar un factor de corrección de luminancia para hacer más perceptibles los resultados obtenidos.
- Para las aplicaciones de compresión de imagen y reducción de ruido se utiliza un umbral global, siendo la diferencia la forma de calcular el umbral

- Compresión de imagen: el umbral se escoge tomando como referencia la maxima intensidad presente en la imagen y es calculado como un porcentaje del mismo.
 - Reducción de ruido: el umbral se escoge como la mediana de los detalles correspondientes a la descomposición por ondículas de la imagen.
- El desarrollo computacional de estas tres aplicaciones es evolutivo, partiendo de imágenes en escala de grises para luego extender los resultados a imágenes a color RGB.
 - adicionalmente se elaboro un prototipo de software para poder explicar, ilustrar y documentar los procedimientos involucrados en el desarrollo de dichas aplicaciones, para esto se tomaron en cuenta varias funcionalidades tanto en desempeño como en performance, siendo las principales características
 1. Selección por explorador de la imagen a tratar.
 2. Selección de los niveles de descomposición a realizar y su respectiva reconstrucción.
 3. Selección de los niveles de descomposición y reconstrucción con los cuales van a trabajar los procedimientos.
 4. Selección del procedimiento a realizar: explicación de la TRO bidimensional, descomposición, reconstrucción, detección de bordes, compresión de imagen y reducción de ruido.
 5. Selección del umbral de compresión.
 6. Selección del factor de corrección de luminancia.
 7. Capacidad de mostrar resultados intermedios en todos los procedimientos anteriores.
 8. Capacidad de guardar los resultados finales e intermedios de los procedimientos anteriores.

Conclusiones

- El Análisis de Ondículas es relativamente nuevo, cuando se vinculó la matemática de las ondículas con los frames se dieron las condiciones necesarias para formulación y elaboración del fundamento matemático conocido como Análisis multiresolución (AMR) el cual llevo al máximo apogeo contemporáneo en la evolución de este análisis.
- Los algoritmos piramidales surgieron originalmente para la compresión de imágenes, pero con el concepto de AMR expanden su aplicación a diversos tipos de señales siendo los más importantes sonido, imagen y video. En esta tesis se desarrolló el proceso de extensión de estos algoritmos piramidales en señales unidimensionales (como por ejemplo: sonido) a señales bidimensionales (como por ejemplo: imagen). Este proceso de extensión también se puede continuar para señales tridimensionales (como por ejemplo: video), para esto se debe representar el video como una hipermatriz $V_{M \times N \times 3 \times t}$ donde t corresponde al número de imágenes que conforman el video, ya que un video puede ser considerado como una sucesión temporal de imágenes.
- Los algoritmos desarrollados para la compresión de imagen y reducción de ruido pueden ser fácilmente modificados para poder ser utilizados en videos. Teniendo en cuenta la representación hipermatricial de u video $V_{M \times N \times 3 \times t}$, notamos que cada componente para un t fijo es una imagen en particular a la cual se le puede aplicar los algoritmos de compresión y/o reducción de ruido, conociendo la variación de t mediante un bucle se programa la aplicación de de estos procedimientos a cada imagen componente del video obteniéndose así los resultados esperados.
- Una de las principales ventajas computacionales de la Transformada Rápida de Ondícula (TRO) sobre la Transformada Rápida de Fourier (TRF) es el bajo costo computacional. Es por esta razón que se vienen estudiando y desarrollando aplicaciones graficas basadas en la TRO.
- Los bordes de una imagen contienen información valiosa sobre las fronteras de los objetos pertenecientes a la imagen, por lo que son utilizados principalmente en los procesos de segmentación de imágenes y reconocimiento de objetos, específicamente hablando en un procedimiento de detección de objetos se requieren procesar grandes volúmenes de datos y esto debe ser realizado en el menor tiempo posible, es por eso que la detección de bordes por ondículas brinda una alternativa para lograr realizar dichos procedimientos de manera más rápida.
- La compresión de imagen, fue la primera aplicación que se le dio al Análisis de

Ondículas, actualmente este tipo de procesos viene integrado en diversos aparatos digitales. La compresión por ondículas logró mejorar drásticamente las compresiones de imágenes ya existentes resultando así el estándar ISO de compresión de imágenes denominado JPEG-2000 posterior mente surge el formato de compresión de video FLV como se comento antes esto fue posible ya que desarrollada una compresión de imagen extenderla a video es sumamente sencillo.

- La última aplicación desarrollada fue la “reducción de ruido”, este procedimiento es bastante similar al de compresión de imagen ya que reducimos el ruido mediante un umbral, este umbral a diferencia del umbral de compresión es calculado después de haber descompuesto la imagen, y se calcula solo con los valores de los resultados correspondientes al operador detalle, y luego se procede a depreciar los valores que sean menor que el umbral, para después reconstruir la imagen obteniendo así nuestro resultado esperado. La reducción de ruido sin duda alguna es un alivio para mejorar la nitidez de las imágenes, por lo que este tipo de procedimientos ya viene incluido en diversos dispositivos digitales. Adicionalmente el procedimiento de reducción de ruido suele ser acoplado como paso adicional al final de otras aplicaciones, principalmente en la detección de bordes, obteniéndose mejores resultados.

Bibliografía

- [1] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Jhon Wiley & Sons, 1978.
- [2] KOLMOGOROV, A. N. & Fomin, S. V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial MIR Moscu, segunda edición, 1975.
- [3] FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Cquações Diferenciais Parciais*, Projecto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [4] SIDDIQI, A. H. *Applied Functional Analysis. Numerical Methods, Wavelet Methods, and Image Processing*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., 2004.
- [5] SHI, X. & CHEN, F., *Necessary condition and sufficient condition for affine frames*, Science in China, Series A: Mathematics, 2005.
- [6] HERNÁNDEZ, E. & Weiss, G. *A First Course on Wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC PRESS, 1996.
- [7] CHRISTENSENS, O. *Frames and Bases. An Introductory Course*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2008.
- [8] DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*, The Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [9] WOJTASZCZYK, P. *A Mathematical Introduction to Wavelets*, London Mathematical Society Student Text 37, 1999.
- [10] MEYER, I. *Wavelets and Operators*, Cambridge Studies in Mathematical 37, 1992.
- [11] POULARIKAS A. D., *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press LLC, 2001.
- [12] RAO, A. D. & Yip, P. C., *The Transforms and Data Compression Handbook*, CRC Press LLC, 2001.
- [13] KOSCHAN, A. & Abidi, M. *Digital Color Image Processing*, Jhon Wiley & Sons, 2008.

Apéndice A

Historia del Análisis de Ondículas

El Análisis de Ondículas, desde el punto de vista matemático, es nuevo aunque sus primeros antecedentes se remontan a 1807, año en que se publican los trabajos de análisis de frecuencia realizados por Joseph Fourier.

Posteriormente en 1909, Alfred Haar construye una función seccionalmente constante, posteriormente conocida como la *ondícula de Haar*, el término ondícula es acuñado varios años después, para la cual sus dilataciones y traslaciones forman una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{R})$, la cual es conocida como la *base de Haar*. Las bases sentadas por el trabajo de Haar son consideradas como los fundamentos del Análisis de Ondículas.

En 1930, John Littlewood y Richard Paley, de la Universidad de Cambridge, demostraron que la información local sobre una onda, como la duración de un impulso de energía, se puede recuperar mediante la agrupación de los términos de sus series de Fourier en *octavas*.

En 1946, Dennis Gabor, un científico británico-húngaro inventor de la holografía, descompone las señales en *paquetes de tiempo-frecuencia* o *Frecuencias de Gabor*.

En 1952, R. J. Duffin y A. C. Schaeffer presentar su artículo *A Class of nonharmonic Fourier Series* al *International Congress of Matemáticos*, donde se introduce por primera vez la noción de *frame*.

En 1981, Jean P. Morlet, ingeniero geofísico francés, encuentra el modo de descomponer una señal sísmica en cierto tipo de ondas de forma constante, posteriormente conocidas como *ondículas de Morlet*.

En 1982, Peter J. Burt, de Sarnoff Corporation, y Edward H. Adelson, del MIT, desarrollan el *algoritmo piramidal* para la compresión de imágenes.

Posteriormente en 1984, Jean P. Morlet con ayuda de Alex Grossman, físico cuántico croata residente en Francia, desarrolló su modelo de descomposición de funciones en ondículas de forma constante, acuñando el término *ondelette* que posteriormente se tradujo del idioma

francés al idioma inglés como *wavelet* y al idioma español como *ondícula*. Uno de los resultados más importantes de este trabajo es la concepción de la *Transformada Continua de Ondícula*.

En 1985, Yves F. Meyer, matemático francés de la Universidad de París, fue el primero en darse cuenta de la conexión entre las ondículas de Morlet y las ondículas anteriores. Meyer continuó su trabajo y descubrió las ondículas ortogonales con lo cual manipular y trabajar con la transformada de ondícula resultó tan fácil como con una transformada de Fourier.

En 1986, Stéphane Mallat, un antiguo alumno de Meyer que estaba haciendo un doctorado en visión informática, vinculó la teoría de ondículas a la literatura existente sobre procesamiento de imágenes. Llevando los algoritmos piramidales al contexto de las ondículas.

Así también, Ingrid Daubechies, A. Grossman con Y. Meyer presentan el artículo *Painless nonorthogonal expansions* al *Journal of Mathematical Physics*, éste artículo es el primero en usar los frames en conjunto con las ondículas.

En esta época la idea de la observación de señales a distintas escalas de resolución ya era familiar para los expertos en procesamiento de imágenes. Mallat, en colaboración con Meyer, demostró que las ondículas están implícitas en estos procesos. De esta forma Meyer y Mallat dieron origen al *Análisis Multiresolución* (AMR) en el contexto de las ondículas, sentando las bases teóricas para construir cualquier tipo de ondícula.

En 1987, I. Daubechies construyó las primeras ondículas ortogonales suaves con soporte compacto. Sus ondículas convierten la teoría en una herramienta práctica.

En 1990, David Donoho e Iain Johnstone, de la Universidad de Stanford, utilizaron las ondículas para *reducir el ruido* de las imágenes, haciéndolas aún más nítidas que los originales.

En 1992, el FBI eligió un método de ondículas desarrollado por Tom Hopper, de la división de Servicios de Información Criminal del FBI, y Jonathan Bradley y Chris Brislawn, del Laboratorio Nacional de Los Alamos, para comprimir su enorme base de datos de huellas dactilares.

En 1995, Pixar Studios presenta la película Toy Story, la primera película de dibujos animados realizada completamente por computadora. En la secuela Toy Story 2, algunas formas se realizan mediante superficies de subdivisión, una técnica relacionada matemáticamente con las ondículas.

En 1996, se desarrolló la tecnología de DjVu, que fue desarrollada originalmente por Yann Le Cun, Léon Bottou, Patrick Haffner y Paul G. Howard en los laboratorios de AT&T, DjVu es una técnica de compresión de imagen basada en ondículas.

En 1999, La Organización Internacional de Estándares (International Standards Organization) aprobó un nuevo estándar de compresión de imágenes digital denominado *JPEG-2000*. El nuevo estándar utiliza ondículas para comprimir archivos de imágenes en una proporción de 1:200, sin pérdidas apreciables en la calidad de la imagen.

En 2002, Macromedia lanza al mercado *Macromedia Flash MX*, que es una aplicación en forma de reproductor multimedia que incluía el formato de video *Flash Video (FLV)*, el cual es un formato de compresión de video por ondículas. FLV fue diseñado para su uso a través de Internet, especialmente el vídeo, como servicios de alojamiento Video Desk. Actualmente, FLV es el formato de elección para el vídeo de Internet, que combina la compresión muy buena con buena calidad de audio y vídeo. Este formato de vídeo también pueden reproducirse en casi cualquier tipo de ordenador.

Apéndice B

Algoritmos Básicos

B.1 Ordenamiento

Algoritmo B.1: Ordenamiento

Entrada: Una matriz A

Salida : La matriz A ordenada

```
1  $[M, N] = \text{dimensión}(f);$ 
2  $Aux = A$ 
3 Para  $i \leftarrow 1$  siguiente  $i \leftarrow i + 1$  hasta  $M$  hacer
4   Si  $\text{resto}(i, 2) \neq 0$  entonces
5      $A(\frac{i+1}{2}, :) = Aux(i, :)$ 
6   si no
7      $A(\frac{M+i}{2}, :) = Aux(i, :)$ 
8   fin si
9 fin para
```

B.2 TRO3

Algoritmo B.2: TRO3

Entrada: Una imagen f

Salida : Resultado de aplicar TRO a f almacenado en T_f

```

1   $T_f \leftarrow \text{single}(f);$ 
2   $[M, N, R] \leftarrow \text{dimensión}(T_f);$ 
3  Si  $\text{resto}(M, 2) \neq 0$  entonces
4     $T_f \leftarrow T_f(1 : M - 1, :, :)$ 
5  fin si
6  Si  $\text{resto}(N, 2) \neq 0$  entonces
7     $T_f \leftarrow T_f(1, 1 : N - 1, :)$ 
8  fin si
9  Si  $R=1$  entonces
10    $T_M \leftarrow \text{ceros}(M, M);$ 
11    $T_N \leftarrow \text{ceros}(N, N);$ 
12   Para  $i \leftarrow 1$  siguiente  $i \leftarrow i + 2$  hasta  $M$  hacer
13      $T_M \left( \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
14      $T_M \left( \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
15      $T_M \left( \frac{M}{2} + \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
16      $T_M \left( \frac{M}{2} + \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow -\frac{1}{\sqrt{2}};$ 
17   fin para
18   Para  $i \leftarrow 1$  siguiente  $i \leftarrow i + 2$  hasta  $N$  hacer
19      $T_N \left( \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
20      $T_N \left( \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
21      $T_N \left( \frac{N}{2} + \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
22      $T_N \left( \frac{N}{2} + \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow -\frac{1}{\sqrt{2}};$ 
23   fin para
24    $T_f \leftarrow T_M * T_f * T_N^T;$ 
25 si no
26   Para  $w \leftarrow 1$  siguiente  $w \leftarrow i + 1$  hasta  $R$  hacer
27      $T_f(:, :, w) \leftarrow \text{TRO3}(T_f(:, :, w));$ 
28   fin para
29 fin si

```

B.3 TROI3

Algoritmo B.3: TROI3

Entrada: Una imagen f , correspondiente al resultado de TRO3

Salida : Imagen reconstruida T_f

```

1   $T_f \leftarrow \text{single}(f);$ 
2   $[M, N, R] \leftarrow \text{dimensión}(T_f);$ 
3  Si  $\text{resto}(M, 2) \neq 0$  entonces
4     $T_f \leftarrow T_f(1 : M - 1, :, :)$ 
5  fin si
6  Si  $\text{resto}(N, 2) \neq 0$  entonces
7     $T_f \leftarrow T_f(1, 1 : N - 1, :)$ 
8  fin si
9  Si  $R=1$  entonces
10    $T_M \leftarrow \text{ceros}(M, M);$ 
11    $T_N \leftarrow \text{ceros}(N, N);$ 
12   Para  $i \leftarrow 1$  siguiente  $i \leftarrow i + 2$  hasta  $M$  hacer
13      $T_M \left( \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
14      $T_M \left( \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
15      $T_M \left( \frac{M}{2} + \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
16      $T_M \left( \frac{M}{2} + \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow -\frac{1}{\sqrt{2}};$ 
17   fin para
18   Para  $i \leftarrow 1$  siguiente  $i \leftarrow i + 2$  hasta  $N$  hacer
19      $T_N \left( \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
20      $T_N \left( \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
21      $T_N \left( \frac{N}{2} + \frac{i+1}{2}, i \right) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}};$ 
22      $T_N \left( \frac{N}{2} + \frac{i+1}{2}, i + 1 \right) \leftarrow -\frac{1}{\sqrt{2}};$ 
23   fin para
24    $T_M \leftarrow \text{inversa}(T_M);$ 
25    $T_N \leftarrow \text{inversa}(T_N);$ 
26    $T_f \leftarrow T_M * T_f * T_N^T;$ 
27 si no
28   Para  $w \leftarrow 1$  siguiente  $w \leftarrow i + 1$  hasta  $R$  hacer
29      $T_f(:, :, w) \leftarrow \text{TRO3}(T_f(:, :, w));$ 
30   fin para
31 fin si

```

B.4 Detección de Bordes

Algoritmo B.4: Detección de Bordes

Entrada: Una imagen f , factor de corrección de luminancia L

Salida : Bordes de la imagen f , almacenados en TT_i

```
1  $[M, N, R] = \text{dimensión}(f);$ 
2 Si  $R = 3$  entonces
3    $A_f = 0.3 * f(:, :, 1) + 0.59 * f(:, :, 2) + 0.11 * f(:, :, 3)$ 
4 si no
5    $A_f = f$ 
6 fin si
7  $A_f \leftarrow \text{single}(A_f);$ 
8  $T_f \leftarrow TRO3(A_f);$ 
9  $TT_f \leftarrow TRO3(T_f(1 : \frac{M}{2}, 1 : \frac{N}{2}));$ 
10  $TT_f(1 : \frac{M}{4}, 1 : \frac{N}{4}) \leftarrow \text{ceros}(\frac{M}{4}, \frac{M}{4});$ 
11  $T_f(1 : \frac{M}{2}, 1 : \frac{N}{2}) \leftarrow TROI3(TT_f);$ 
12  $TT_i \leftarrow TROI3(T_f);$ 
13  $TT_i \leftarrow L * TT_i$ 
```

B.5 Compresión de Imagen

Algoritmo B.5: Compresión de Imagen

Entrada: Una imagen f , umbral Umb

Salida : Compresión de la imagen f a umbral Umb , almacenada en A_f

```
1  $[M, N, R] = \text{dimensión}(f);$ 
2  $A_f \leftarrow \text{single}(f);$ 
3  $T_f \leftarrow TRO3(A_f);$ 
4 Para  $k \leftarrow 1$  siguiente  $k \leftarrow k + 1$  hasta  $R$  hacer
5    $T_e = \text{máximo}(\text{máximo}(|A_f(:, :, k)|)) * \frac{Umb}{100};$ 
6   Para  $i \leftarrow 1$  siguiente  $i \leftarrow i + 1$  hasta  $M$  hacer
7     Para  $j \leftarrow 1$  siguiente  $j \leftarrow j + 1$  hasta  $N$  hacer
8       Si  $T_f(i, j, k) < T_e$  entonces
9          $T_f(i, j, k) = 0$ 
10      fin si
11    fin para
12  fin para
13 fin para
14  $A_f \leftarrow TROI3(T_f);$ 
```

B.6 Reducción de Ruido

Algoritmo B.6: Reducción de Ruido

Entrada: Una imagen f

Salida : Reducción de ruido de la imagen f , almacenada en A_f

```
1  $[M, N, R] = \text{dimensión}(f);$ 
2  $A_f \leftarrow \text{single}(f);$ 
3  $T_f \leftarrow TRO3(A_f);$ 
4 Para  $k \leftarrow 1$  siguiente  $k \leftarrow k + 1$  hasta  $R$  hacer
5    $p_1 = \text{mediana}(\text{mediana}(|T_f(1 : \frac{M}{2}, \frac{N}{2} + 1 : N, k)|));$ 
6    $p_2 = \text{mediana}(\text{mediana}(|T_f(\frac{M}{2} + 1 : M, 1 : \frac{N}{2}, k)|));$ 
7    $p_3 = \text{mediana}(\text{mediana}(|T_f(\frac{M}{2} + 1 : M, \frac{N}{2} + 1 : N, k)|));$ 
8    $p = \frac{\text{mediana}([p_1, p_2, p_3])}{0.6745};$ 
9    $T_e = p * \sqrt{2 \log(\text{mediana}(M, N))};$ 
10  Para  $i \leftarrow 1$  siguiente  $i \leftarrow i + 1$  hasta  $M$  hacer
11    Para  $j \leftarrow 1$  siguiente  $j \leftarrow j + 1$  hasta  $N$  hacer
12      Si  $|T_f(i, j, k)| < T_e$  entonces
13         $T_f(i, j, k) = 0$ 
14      fin si
15    fin para
16  fin para
17 fin para
18  $A_f \leftarrow TROI3(T_f);$ 
```

Apéndice C

Códigos en MATLAB[®] *R2010a*

C.1 Wavelet

```
function varargout = Wavelet(varargin)
% WAVELET M-file for Wavelet.fig
% WAVELET, by itself, creates a new WAVELET or raises the existing
% singleton*.
%
% H = WAVELET returns the handle to a new WAVELET or the handle to
% the existing singleton*.
%
% WAVELET('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
% function named CALLBACK in WAVELET.M with the given input arguments.
%
% WAVELET('Property','Value',...) creates a new WAVELET or raises the
% existing singleton*. Starting from the left, property value pairs are
% applied to the GUI before Wavelet_OpeningFcn gets called. An
% unrecognized property name or invalid value makes property application
% stop. All inputs are passed to Wavelet_OpeningFcn via varargin.
%
% *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows only one
% instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to help Wavelet

% Last Modified by GUIDE v2.5 31-Aug-2010 21:52:08

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name', mfilename, ...
```

```

'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @Wavelet_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn', @Wavelet_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn', [] , ...
'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargin
[varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

% — Executes just before Wavelet is made visible.
function Wavelet_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin command line arguments to Wavelet (see VARARGIN)

% Choose default command line output for Wavelet
handles.output = hObject;

handles.imagen=zeros(10,10);
handles.imagenR=zeros(10,10);
handles.h = 1;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes Wavelet wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% — Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = Wavelet_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

```

```

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

function niveles_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to niveles (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of niveles as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of niveles as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function niveles_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to niveles (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function luminancia_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to luminancia (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of luminancia as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of luminancia as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function luminancia_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to luminancia (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))

```

```

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% — Executes on button press in guardar.
function guardar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to guardar (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of guardar

% — Executes on button press in mostrar.
function mostrar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to mostrar (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of mostrar

function umbral_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to umbral (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of umbral as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of umbral as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function umbral_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to umbral (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% — Executes on button press in procesar.
function procesar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to procesar (see GCBO)

```

```

% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of procesar

S=1;

[M N R]=size(single(handles.imagen));
d = str2double(get(handles.niveles,'String'));
id = str2double(get(handles.luminancia,'String'));
umb = str2double(get(handles.umbral,'String'));
if (mod(M,2^d)~=0)
handles.imagen=handles.imagen(1:M-mod(M,2^d),:,:);
S=0;
end
if (mod(N,2^d)~=0)
handles.imagen=handles.imagen(:,1:N-mod(N,2^d),:);
S=0;
end

if (S==0)
questdlg('La imagen fue modificada para poder ser procesada con el nivel fijado','AVISO','Aceptar','Aceptar')
end

MI=get(handles.mostrar,'Value');
GR=get(handles.guardar,'Value');

switch (handles.h)
case 1
handles.imagenR = Explicacion_TRO_bidimensional(handles.imagen,MI,GR,1);
case 2
handles.imagenR=TRO3(handles.imagen,MI,GR,d,1);
case 3
TROI3(handles.imagenR,MI,GR,d,1);
case 4
handles.imagenR=Deteccion_de_bordes(handles.imagen,MI,GR,d,id,1);
case 5
Compresion_de_imagen(handles.imagen,MI,GR,d,umb,1);
case 6
Reduccion_de_ruido(handles.imagen,MI,GR,d,1);
otherwise
end

```

```

guidata(hObject,handles);

% -----
function abrir_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to abrir (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
[FileName Path]=uigetfile({'*.jpg;*.bmp;'},'Abrir Imagen');
if isequal(FileName,0)
return
else
a=imread(strcat(Path,FileName));
handles.imagen=a;
figure;
imshow(a);
end

handles.direccion=strcat(Path,FileName);
guidata(hObject,handles);

% -----
function acerca_de_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to acerca_de (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
msgbox({'Procesamiento de imagen basado en el Análisis de Ondículas', 'Desarrollado por:
Nilton Alan García Hilares', 'UNMSM - EAP Computación
Científica'},'Wavelet ', 'help');

% — Executes when selected object is changed in tareas.
function tareas_SelectionChangeFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to the selected object in tareas
% eventdata structure with the following fields (see UIBUTTONGROUP)
% EventName: string 'SelectionChanged' (read only)
% OldValue: handle of the previously selected object or empty if none was selected
% NewValue: handle of the currently selected object
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

if (hObject==handles.uno)
handles.h = 1;
set(handles.niveles,'String','1');
set(handles.luminancia,'String','1');
elseif(hObject==handles.dos)

```

```

handles.h = 2;
set(handles.niveles,'String','1');
set(handles.luminancia,'String','1');
elseif(hObject==handles.tres)
handles.h = 3;
set(handles.luminancia,'String','1');
elseif(hObject==handles.cuatro)
handles.h = 4;
set(handles.niveles,'String','2');
set(handles.luminancia,'String','4');
elseif(hObject==handles.cinco)
handles.h = 5;
set(handles.niveles,'String','1');
set(handles.luminancia,'String','1');
set(handles.umbral,'String','10');
elseif(hObject==handles.seis)
handles.h = 6;
set(handles.niveles,'String','1');
set(handles.luminancia,'String','1');
set(handles.umbral,'String','10');
end
guidata(hObject,handles);

```

C.2 Explicación TRO bidimensional

```
function Z=Explicacion_TRO_bidimensional(f,m,g,d)
```

```
[M N R]=size(f);
```

```
Tf=single(f);
```

```
TM=zeros(M);
```

```
TN=zeros(N);
```

```
for i=1:2:M
```

```
TM(i,i)=1/sqrt(2);
```

```
TM(i,i+1)=1/sqrt(2);
```

```
TM(i+1,i)=1/sqrt(2);
```

```
TM(i+1,i+1)=-1/sqrt(2);
```

```
end
```

```
for i=1:2:N
```

```
TN(i,i)=1/sqrt(2);
```

```

TN(i,i+1)=1/sqrt(2) ;
TN(i+1,i)=1/sqrt(2);
TN(i+1,i+1)=-1/sqrt(2);
end

if (R==3)
for k =1:3
Tf1(:, :,k)=TM*Tf(:, :,k);
end

if (m)
figure
imshow(uint8(Tf1));
end
if (g)
imwrite(uint8(Tf1),'Explica1.jpg','jpg');
end

Tf2 = zeros(M,N);

for k =1:3
for i=1:2:M
Tf2((i+1)/2, :,k)=Tf1(i, :,k);
end

for i=2:2:M
Tf2(M/2+i/2, :,k)=Tf1(i, :,k);
end
end

figure
imshow(uint8(Tf2));

if (g)
imwrite(uint8(Tf2),'Explica2.jpg','jpg');
end

for k =1:3
Tf3(:, :,k) = Tf2(:, :,k)*TN';
end

if (m)
figure

```



```

imshow(uint8(Tf3));
end

if (g)
imwrite(uint8(Tf3),'Explica3.jpg','jpg');
end

for k =1:3
Tf31(:, :,k)=Tf3(:, :,k)';
end

for k =1:3
for i=1:2:N
Tf4((i+1)/2, :,k)=Tf31(i, :,k);
end
end

for i=2:2:N
Tf4(N/2+i/2, :,k)=Tf31(i, :,k);
end
end

for k =1:3
Tf41(:, :,k)=Tf4(:, :,k)';
end

Z=Tf41;

figure
imshow(uint8(Tf41));

if (g)
imwrite(uint8(Tf41),'Explica4.jpg','jpg');
end
end

```

C.3 TRO3

```

function Z=TRO3(Im,m,g,d,S)

f=Im;
Tf=single(f);
[M N R]=size(Tf);

```

```

if (R==3)
for j=1:d
[M N R]=size(Tf);

TM=zeros(M);
TN=zeros(N);

for i=1:2:M
TM((i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TM((i+1)/2,i+1)=1/sqrt(2);
TM(M/2+(i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TM(M/2+(i+1)/2,i+1)=-1/sqrt(2);
end

for i=1:2:N
TN((i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TN((i+1)/2,i+1)=1/sqrt(2);
TN(N/2+(i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TN(N/2+(i+1)/2,i+1)=-1/sqrt(2);
end

for k=1:3
Tf(:, :,k)=TM*Tf(:, :,k)*(TN')';
end

if (j==1)
Z=Tf;
Tf = Z(1:M/2,1:N/2,:);
else
Z(1:M,1:N,:)=Tf;
Tf=Z(1:M/2,1:N/2,:);
end

if (m && j~=d)
figure
imshow(uint8(Z));
end
if (g && j~=d)
str=strcat('Descompocion',num2str(d));
str=strcat(str,'.jpg');
imwrite(uint8(Z),str,'jpg')
end

```

```

end

if (S~=0)
figure
imshow(uint8(Z));
end
if (g)
imwrite(uint8(Z),'DescomposicionP.jpg','jpg')
end
end

```

C.4 TROI3

```

function Z=TROI3(Im,m,g,d,S)

f=Im;
Tf=single(f);

[M1 N1 R1]=size(Tf);

if (R1==3)

for j=d:-1:1

if (j<d)
for k=1:3
Tf(1:M,1:N,:)=Z;
end
if(m)
figure
imshow(uint8(Tf));
end

if (g)
str=strcat('Reconstruccion',num2str(d));
str=strcat(str,'.jpg');
imwrite(uint8(Z),str,'jpg')
end

end
Aux=Tf(1:M1/2^(j-1),1:N1/2^(j-1),:);

```

```

if (m)
figure
imshow(uint8(Aux));
end

if (g)
str=strcat('ReconstruccionAux',num2str(d));
str=strcat(str,'.jpg');
imwrite(uint8(Aux),str,'jpg')
end

[M N R]=size(Aux);

Z = zeros(M,N);

TM=zeros(M);
TN=zeros(N);

for i=1:2:M
TM((i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TM((i+1)/2,i+1)=1/sqrt(2);
TM(M/2+(i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TM(M/2+(i+1)/2,i+1)=-1/sqrt(2);
end
for i=1:2:N
TN((i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TN((i+1)/2,i+1)=1/sqrt(2) ;
TN(N/2+(i+1)/2,i)=1/sqrt(2);
TN(N/2+(i+1)/2,i+1)=-1/sqrt(2);
end

TM=inv(TM);
TN=inv(TN);

for k=1:3
Z(:, :,k)=TM*Aux(:, :,k)*(TN)';
end

if (m && j~=1)
figure
imshow(uint8(Z));
end
end

```

```

if (S~=0)
figure
imshow(uint8(Z));
end

if (g)
imwrite(uint8(Z),'Reconstruccion.jpg','jpg')
end
end

```

C.5 Detección de Bordes

```

function Tf=Deteccion_de_bordes(f,m,g,d,id,S)

Tf=single(f);
[M N R]=size(Tf);

if (R==3)
Aux1 = Tf(:, :,1)*0.3+ Tf(:, :,2)*0.59+ Tf(:, :,3)*0.11;
for k=1:3
Aux(:, :,k)=Aux1;
end
else
Aux=Tf;
end

if(m)
figure
imshow(uint8(Aux))
end

if (g)
imwrite(uint8(Aux),'ImagenEG.jpg','jpg')
end

Aux=TRO3(Aux,false,false,d,0);

if(m)
figure
imshow(uint8(Aux))
end

```

```

if (g)
imwrite(uint8(Aux),'DescomposicionEG.jpg','jpg')
end

for k=1:3
Aux(1:M/2^d,1:N/2^d,k)=zeros(M/2^d,N/2^d);
end

if (m)
figure
imshow(uint8(Aux))
end

if (g)
imwrite(uint8(Aux),'BordesP.jpg','jpg')
end

B=TROI3(Aux,0,0,d,0);

if(m)
figure
imshow(uint8(B))
end

if (g)
imwrite(uint8(B),'BordesO.jpg','jpg')
end

figure
imshow(uint8(id*B))

if (g)
imwrite(uint8(id*B),'BordesF.jpg','jpg')
end

```

C.6 Compresión de Imagen

```

function Compresion_de_imagen(f,m,g,d,u,S)

Img=single(f);
[M N R]=size(Img);

```

```

Aux=TRO3(Img,false,false,d,0);

if (m)
figure
imshow(uint8(Aux))
end

if (g)
imwrite(uint8(Aux),'CompresionSUmb.jpg','jpg')
end

for k=1:3
Te = max(max(abs(Aux(:,k))))*u/100;
for i=1:M
for j = 1:N
if (Aux(i,j,k)<Te)
Aux(i,j,k)=0;
end
end
end
end

if (m)
figure
imshow(uint8(Aux))
end

if (g)
imwrite(uint8(Aux),'CompresionUmb.jpg','jpg')
end

R=TROI3(Aux,0,0,d,0);

figure
imshow(uint8(R))

if (g)
imwrite(uint8(R),'compresionF.jpg','jpg')
end

```

C.7 Reducción de Ruido

```
function Reduccion_de_ruido(f,m,g,d,S)

Img=single(f);
[M N R]=size(Img);

Aux=TRO3(Img,false,false,d,0);

if(m)
figure
imshow(uint8(Aux))
end

if (g)
imwrite(uint8(Aux),'DescomposicionRuid.jpg','jpg')
end

for k=1:3

p1=median(median(abs(Aux(1:M/2,N/2+1:N,k))))/0.6745;
p2=median(median(abs(Aux(M/2+1:M,1:N/2,k))))/0.6745;
p3=median(median(abs(Aux(M/2+1:M,N/2+1:N,k))))/0.6745;
p = median([p1 p2 p3]);
Te=p*sqrt(2*log10(median([M ,N])));

for i=1:M
for j = 1:N
if (abs(Aux(i,j,k))<Te)
Aux(i,j,k)=0;
end
end
end

if (m)
figure
imshow(uint8(Aux))
end

if (g)
imwrite(uint8(Aux),'imagenCFiltro.jpg','jpg')
end
```



```
R=TROI3(Aux,0,0,d,0);
```

```
figure
```

```
imshow(uint8(R))
```

```
if (g)
```

```
imwrite(uint8(R),'imagenERuid.jpg','jpg')
```

```
end
```

Apéndice D

Utilizando el prototipo *Wavelet*

El prototipo desarrollado, al cual llamamos *Wavelet*, para mostrar las aplicaciones del Análisis de Ondículas al procesamiento de imágenes está basado en los algoritmos base mostrados en el Apéndice B, como ya se comentó el prototipo fue desarrollado en MATLAB® R2010a y su código se muestra en el Apéndice C. Su interface se muestra en la Figura D.1 y ahora explicaremos su funcionamiento.

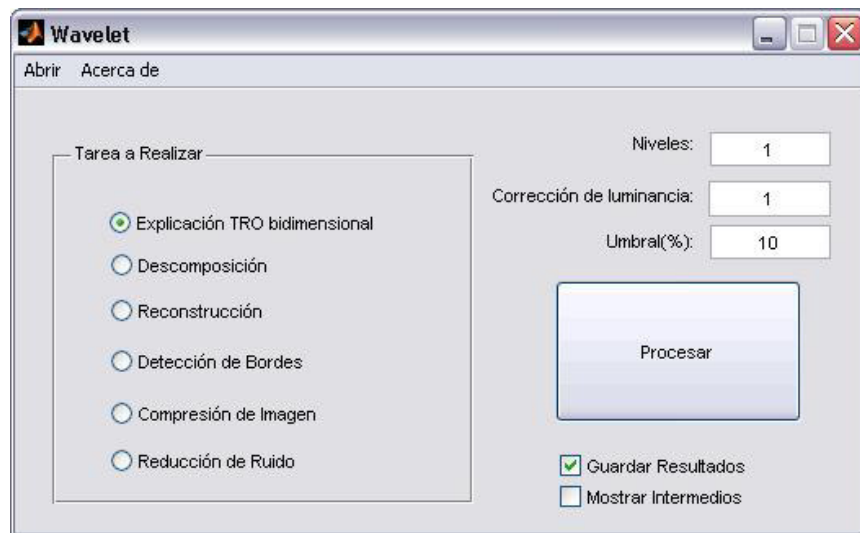


Figura D.1: Interface del Prototipo *Wavelet*

Uno de los requerimientos principales es seleccionar la imagen a tratar, para ello se agregó como pestaña “Abrir” la cual mediante un menú de explorador permite seleccionar la imagen.

Otro requerimiento principal era poder guardar los resultados obtenidos luego de realizar alguna tarea con la imagen que ya se había cargado, esto se implementó de manera que los resultados se guarden automáticamente después de realizarse la tarea, mientras la opción “Guardar Resultados” siga activada caso contrario no se guardarán los resultados. Además para poder explicar y/o entender de manera más detallada se agregó la opción “Mostrar Intermedios” la cual muestra imágenes de los resultados obtenidos después de ciertas etapas de la tarea que se esté realizando.

A continuación mostraremos diversos resultados obtenidos con *Wavelet*.

Empezaremos con la “Tarea a Realizar” de “Descomposición” - “Reconstrucción” para lo cual trabajaremos con la imagen mostrada en la Figura D.2.



Figura D.2: Ceramica Nazca

Algo que se ha mostrado a lo largo de este trabajo fue la descomposición por ondículas, en particular la descomposición en un nivel, pero hay ocasiones en las que se requiere trabajar con más de un nivel de descomposición, por lo que se le agregó a *Wavelet* la funcionalidad de poder fijar el nivel de descomposición

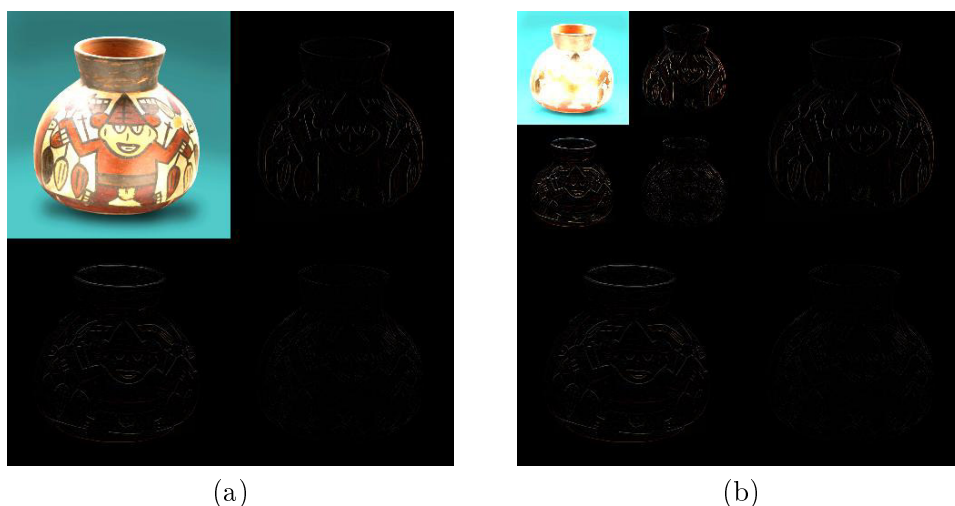


Figura D.3: (a) 1 nivel de descomposición, (b) 2 niveles de descomposición

Debido a las características del análisis multiresolución de Haar, con el cual se desarrolló *Wavelet*, a partir del tercer nivel de descomposición la aproximación a la imagen ha perdido demasiados datos significativos i.e. la mayor parte de la información quedó dispersa en los detalles de la imagen, esto se puede observar en la Figura D.4.

La tarea “Reconstrucción” fue implementada para poder trabajar con cualquiera de los

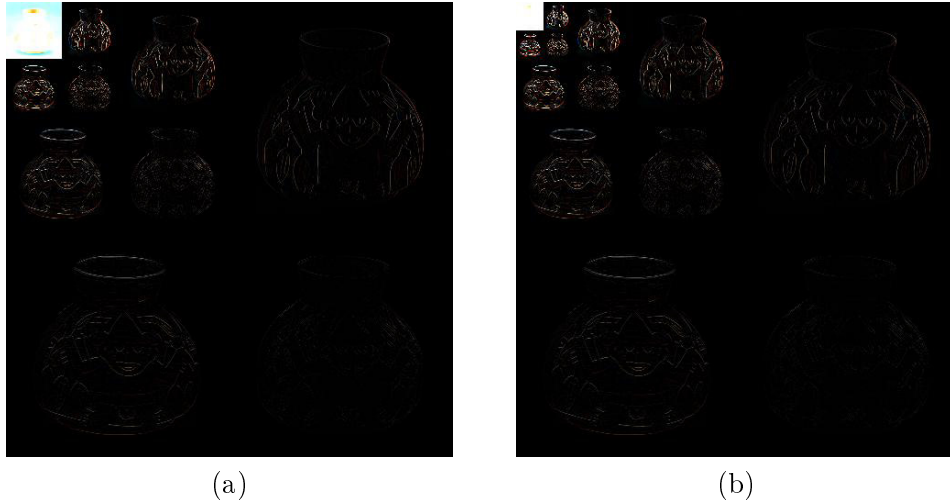


Figura D.4: (a) 3 niveles de descomposición, (b) 4 niveles de descomposición

resultados obtenidos de la tarea “Descomposición” independientemente del nivel de descomposición tomado.

Como ya se comentó antes, mientras se guarden en memoria los valores exactos obtenidos como resultado del proceso de descomposición, se podrá reconstruir de manera exacta la imagen original. Ésta consideración fue tomada en cuenta al momento de implementar *Wavelet*.

La siguiente “Tarea a Realizar” es “Detección de Bordes”, los parámetros por defecto con los que va a trabajar *Wavelet* son 2 niveles de descomposición y un factor de corrección de luminancia de 4, para esto consideremos la imagen mostrada en la Figura D.5.



Figura D.5: Tatuaje de Tumi

Los resultados obtenidos con los parámetros por defecto son mostrados en la Figura D.6a y en la Figura D.6b se muestra los bordes obtenidos con 1 nivel de descomposición y un factor de corrección de luminancia de 3.

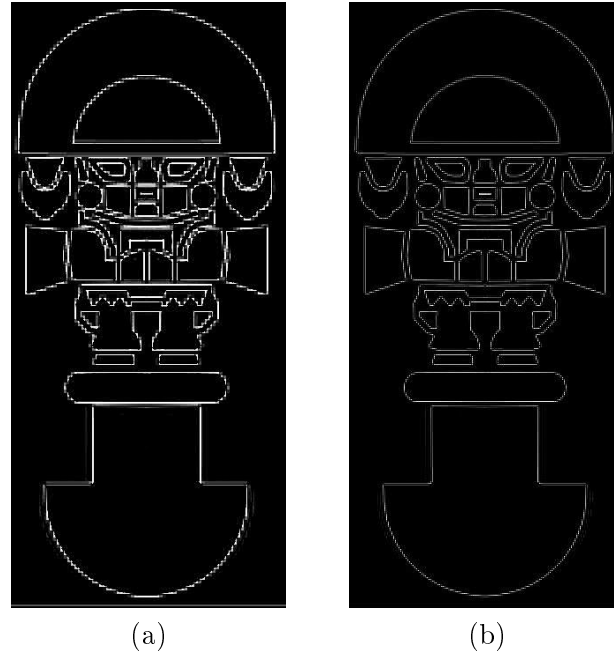


Figura D.6: (a)Bordes con parámetros por defecto , (b) Bordes con parámetros modificados

Como ya se vio en el último capítulo, éste proceso de detección de bordes se puede aplicar a imágenes en color RGB, la Figura D.7a muestra la imagen a la cual se le aplicará el proceso de detección de bordes con 1 nivel de descomposición y un factor de corrección de luminancia de 5 el cual se muestra en la Figura D.7.

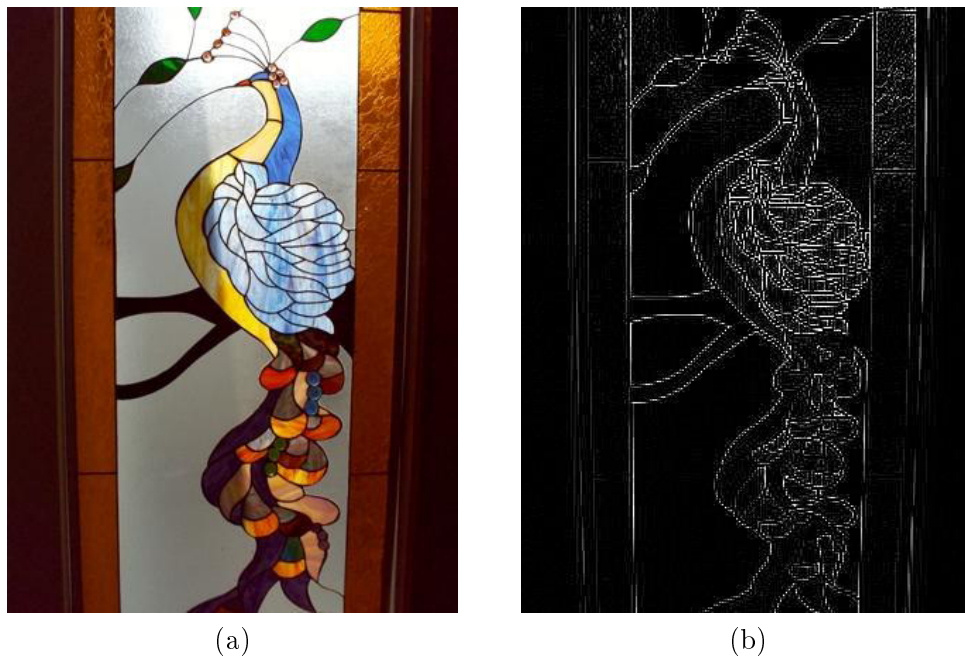


Figura D.7: (a)vitral, (b) bordes del vitral

Si se selecciona “Mostrar Intermedios” se podrá ver paso a paso el proceso anterior i.e. la conversión a escala de grises, la descomposición, la depreciación de la imagen aproximada, y finalmente la reconstrucción, así obtenemos el resultado anterior.

La siguiente “Tarea a Realizar” es la compresión de imagen con umbral, para ello escogemos los niveles de descomposición y el umbral, el umbral es tomado como el porcentaje indicado por el usuario de al valor máximo de la intensidad de los píxeles presentes en la imagen y después los valores de los píxeles que sean menores al umbral se desprecian. Para ilustrar este procedimiento trabajaremos con la imagen mostrada en la Figura D.8. Esta imagen fue tomada por una cámara digital Cannon, de uso cotidiano, la cual tiene dimensiones de 1600×1200 píxeles, es un archivo de tipo JPG de tamaño de 792 Kb.



Figura D.8: Reunión de amigos

En la Figura D.9 se muestra la compresión con 1 nivel de descomposición y un umbral de 5%, esta imagen tiene un tamaño de 328 kb.



Figura D.9: Compresión a umbral de 5%

En la Figura D.10 se muestra la compresión con 1 nivel de descomposición pero a un umbral de 10%, esta imagen resultante tiene un tamaño de 316 kb.



Figura D.10: Compresión a umbral de 10%

De este modo esperamos obtener mejores resultados a medida que aumentemos el umbral de compresión. Esto es cierto, pero el comportamiento de los resultados no es uniforme respecto a la premisa anterior ya que el grado de compresión no solo depende de la elección del umbral sino también de las propiedades de la imagen.

Consideremos como ejemplo la imagen mostrada en la Figura D.11 para la cual mostramos diversos resultados en la Figura D.12, obtenidos a 1 nivel de descomposición, donde observamos el comportamiento de los resultados obtenidos incrementando el umbral de compresión de manera gradual y constante.



Figura D.11: Guerrero Inca (21.7 Kb)



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

Figura D.12: (a)Umbral de 5% (20.9 Kb) , (b) Umbral de 10% (20.2 Kb),(c) Umbral de 15% (19.9 Kb), (d) Umbral de 20% (20.3 Kb), (e) Umbral de 25% (21.3 Kb)

La última “Tarea a Realizar” es “Reducción de Ruido” su procedimiento es bastante similar al de compresión de imagen, salvo que el umbral es calculado con los valores de los detalles de la descomposición de la imagen. la Figura D.13 muestra la imagen original y la Figura D.14 muestra la imagen después de agregarle ruido Gaussiano con Adobe Photoshop.



Figura D.13: Loro peruano

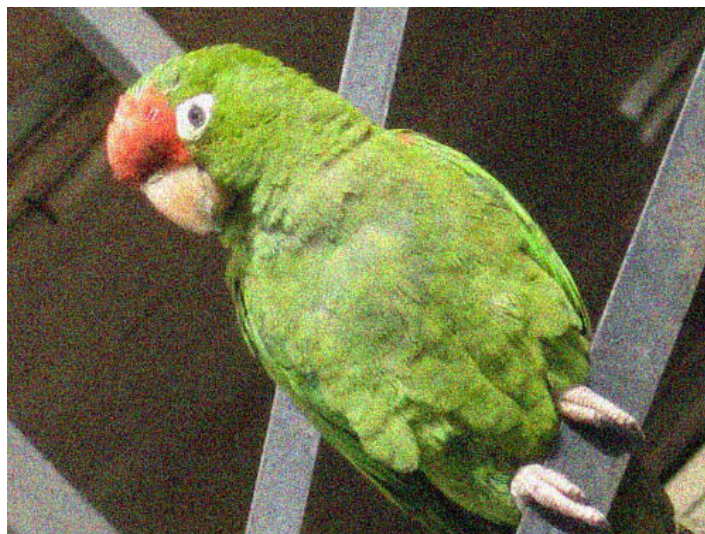


Figura D.14: Loro peruano con ruido Gaussiano

En la Figura D.15 se muestra el resultado de reducir el ruido a 1 nivel de descomposición.

A continuación veremos otro ejemplo, para el cual se le agregó ruido uniforme, a la imagen mostrada en la Figura D.16a, con Adobe Photoshop. Los resultados de la reducción son mostrados en la Figura D.17.



Figura D.15: Loro peruano con ruido reducido



(a)



(b)

Figura D.16: (a) Detalle de Kuelap, (b) Imagen con ruido uniforme



(a)



(b)

Figura D.17: (a) Reducción a 1 nivel de descomposición, (b) Reducción a 2 niveles de descomposición